ZEITSCHRIFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK

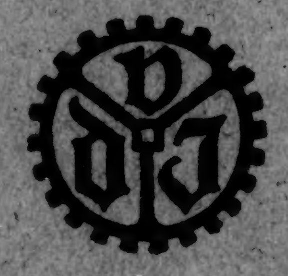
HERAUSGEGEBEN VON PROFESSOR R. VON MISES, BERLIN

Unter Mitwirkung von A. FÖPPL-München, G. HAMEL-Charlottenburg, R. MOLLIER-Dresden, H. Müller-Breslau-Charlottenburg, L. PRANDTL-Göttingen und R. RÜDENBERG-Berlin

Band 1 **Ende August 1921** **Heft 4**

Zur Versammlung der Mathematiker und Physiker in Jena 1921

INHALT:



VERLAG DES VEREINES DEUTSCHER INGENIEURE

ZEITSCHRIFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK

Bd. 1 **Ende August 1921** **Heft 4**

Inhalt:

HAUPTAUFSÄTZE

Über laminare und turbulente Reibung.

Von **TH. v. KÁRMÁN** in Aachen.

Die theoretische Behandlung der Oberflächenreibung von Flüssigkeiten oder Gasen an einer festen Wand stößt auf große Schwierigkeiten, sobald die Vorgänge nicht allein durch die Zähigkeit der Flüssigkeit bestimmt sind, sondern auch die Trägheitskräfte hineinspielen, wie dies — vielleicht außer bei den Strömungserscheinungen in Kapillaren und den Fragen der Schmiermittelreibung — bei fast allen praktischen Aufgaben der Fall ist. In den letzten Jahrzehnten sind immerhin zwei wesentliche Fortschritte auf diesem Gebiet erzielt worden, und zwar in theoretischer Hinsicht durch die sogenannte »Theorie der Grenzschicht« von L. Prandtl und nach der empirischen Richtung hin durch die Sicherstellung der wohl auch früher vermuteten Gesetzmäßigkeit für den Reibungsverlust in glatten Rohren durch H Blasius.

Leider sind die Ergebnisse der Prandtlschen Theorie auf verhältnismäßig enges Gebiet beschränkt geblieben, einmal aus dem mehr äußerlichen Grund, weil ihre mathematische Durcharbeitung für bestimmte Fälle langwierige Rechnungen verlangt, dann aber weil, wie die Versuche zeigen, ihr physikalischer Gültigkeitsbereich ähnlich dem der Theorie der reinen Reibungsströmung in Rohren, durch enge Grenzen beschränkt wird. Wie die reine Reibungsströmung, die sogenannte laminare Strömung in Rohren, bei größeren Geschwindigkeiten einer »turbulenten« den Platz räumt, wird die »laminare Grenzschicht« durch eine »turbulente« ersetzt.

In der vorliegenden Arbeit behandle ich zunächst die Theorie der laminaren Reibungsströmung, indem ich die Grundgedanken der Prandtlschen Grenzschichttheorie vom mathematischen und physikalischen Gesichtspunkte aus möglichst einfach darzustellen suche und eine Methode angebe, die geeignet ist, auch kompliziertere Fälle mit einfachen mathematischen Mitteln, wenigstens angenähert, zu erledigen. Alsdann versuche ich, Rechnungsgrundlagen für die turbulente Reibung zu gewinnen, indem ich Ansätze aufstelle, mittels derer die empirischen Gesetze des turbulenten Rohrwiderstandes auf andere Aufgaben über Reibungswiderstand übertragen werden können.

1. Der mathematische Sinn der Grenzschichttheorie[1]**).** Um die Vorstellung zu fixieren, beschränken wir uns auf ebene Flüssigkeitsströmungen und wählen die Achse $y = 0$ als feste Begrenzung, an der die Flüssigkeit haftet.

Die Differentialgleichungen der ebenen Strömung mit Reibung lassen sich, wie bekannt, durch Einführung der Stromfunktion ψ mittels des Ansatzes

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

(u und v Geschwindigkeitskomponenten in der x- und y-Richtung) und Elimination des Druckes in die einzige Gleichung

$$\frac{\partial \Delta \psi}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{\partial \Delta \psi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial \Delta \psi}{\partial y} = \nu \Delta \Delta \psi \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

zusammenfassen, wobei Δ die Operation $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$, $\nu = \frac{\mu}{\varrho}$ die Zähigkeitszahl (μ = Koeffizient der inneren Reibung, ϱ = Dichte der Flüssigkeit) bedeutet. Die Grenzschichttheorie bezieht sich auf Strömungsvorgänge, bei denen in einiger Entfernung von der Wand die Reibung keinen merklichen Einfluß auf das Geschwindigkeitsfeld ausüben soll, so daß für große Werte von y die Stromfunktion in eine als bekannt vorausgesetzte Potentialfunktion $\psi_0\,(x, y, t)$ übergeht. An der Wand selbst sollen beide Geschwindigkeitskomponenten u und v verschwinden. Um beiden Bedingungen zu genügen, setzen wir zunächst:

$$\psi = \psi_0 - y\left(\frac{\partial \psi_0}{\partial y}\right)_{y=0} + \sqrt{\nu}\,\psi_1\left(\frac{y}{\sqrt{\nu}}, x, t\right) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2).$$

Es ist klar, daß für kleine Werte von y die ersten beiden Summanden sich aufheben, so daß nur die Stromfunktion $\sqrt{\nu}\,\psi_1$ (die Stromfunktion der Grenzschichtströmung) übrig bleibt. Wir wollen diese so bestimmen, daß an der Wand $\frac{\partial \psi_1}{\partial y} = \frac{\partial \psi_1}{\partial x} = 0$ ist. Andrerseits wird, wenn ν eine kleine Größe darstellt, $\frac{y}{\sqrt{\nu}}$ für alle merklich von Null verschiedenen Werte von y sehr groß; es genügt also, ψ_1 so zu bestimmen, daß für $\eta = \frac{y}{\sqrt{\nu}} = \infty$, $\sqrt{\nu}\,\frac{\partial \psi_1}{\partial y} = \left(\frac{\partial \psi_0}{\partial y}\right)_{y=0}$ wird, um der ersten Forderung — Uebergang in die Potentialströmung — zu genügen. Wir sehen daher, daß innerhalb der Grenzschicht (η endlich) die ersten zwei Glieder, außerhalb der Grenzschicht (η sehr groß) die beiden letzten Glieder sich aufheben.[2])

Wir führen den Ansatz (2) in die Gleichung (1) ein, ordnen nach Potenzen von $\sqrt{\nu}$ und behalten nur die höchsten Glieder mit $\frac{1}{\sqrt{\nu}}$ bei. So erhalten wir, indem wir als Variable $\eta = \frac{y}{\sqrt{\nu}}$ statt y einführen, $\frac{\partial \psi_0}{\partial y}$, sowie $\frac{\partial \psi_0}{\partial x}$ nach den Formeln

$$\frac{\partial \psi_0}{\partial y} = \left(\frac{\partial \psi_0}{\partial y}\right)_{y=0} + \left(\frac{\partial^2 \psi_0}{\partial y^2}\right)_{y=0} \eta \sqrt{\nu}\,,$$

$$\frac{\partial \psi_0}{\partial x} = \left(\frac{\partial^2 \psi_0}{\partial x \partial y}\right)_{y=0} \eta \sqrt{\nu}$$

entwickeln und endlich berücksichtigen, daß $\Delta \Delta \psi_0 = 0$, $\left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x}\right)_{y=0} = 0$ ist:

$$\frac{1}{\sqrt{\nu}}\left[\frac{\partial^3 \psi_1}{\partial t\, \partial \eta^2} + \frac{\partial \psi_1}{\partial \eta}\frac{\partial^3 \psi_1}{\partial x\, \partial \eta^2} - \frac{\partial \psi_1}{\partial x}\frac{\partial^3 \psi_1}{\partial \eta^3} - \frac{\partial^4 \psi_1}{\partial \eta^3}\right] = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (3).$$

Diese Gleichung läßt sich einmal integrieren, so daß wir erhalten:

$$\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial t\, \partial \eta} + \frac{\partial \psi_1}{\partial \eta}\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x\, \partial \eta} - \frac{\partial \psi_1}{\partial x}\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \eta^2} - \frac{\partial^3 \psi_1}{\partial \eta^3} = f\,(x, t)$$

---

[1]) Literaturnachweise über Grenzschichttheorie enthält die nachfolgende Abhandlung von Pohlhausen.

[2]) Genau genommen: die u-Komponente der Grenzschichtströmung geht in die u-Geschwindigkeit der Potentialströmung über; für die v-Komponente liefert die Grenzschichtströmung einen Betrag von der Ordnung $\sqrt{\nu}$, der in der Potentiallösung nicht enthalten ist.

oder mit $\frac{\partial \psi_1}{\partial \eta} = u$, $\sqrt{\nu}\,\frac{\partial \psi_1}{\partial x} = -v$, indem wir wieder die Variable $y = \eta\sqrt{\nu}$ einführen,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} - \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, t) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4)$$

in Uebereinstimmung mit den Prandtlschen Gleichungen.

Die Funktion $f(x, t)$ bestimmt sich durch die Bedingung für $y = 0$. Da u in $u_0 = \left(\frac{\partial \psi_0}{\partial y}\right)_{y=0}$ übergehen muß, so ist für $\eta = \infty$

$$\frac{\partial u_0}{\partial t} + u_0\frac{\partial u_0}{\partial x} = f(x, t) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4a).$$

Nun gilt für die reibungslose Potentialströmung die längs der Begrenzung als Stromlinie differenzierte Bernoullische Gleichung (p_0 der Druck längs der Wand):

$$\frac{\partial u_0}{\partial t} + u_0\frac{\partial u_0}{\partial x} = -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p_0}{\partial x} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4b),$$

so daß wir schreiben können:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4c).$$

Die Bedeutung von (4) und (4b) ist offenbar die, daß die als bekannt vorausgesetzte Druckverteilung p_0 längs der Wand, die der Potentialströmung entspringt, gewissermaßen als eingeprägtes Kraftfeld für die Grenzschichtströmung aufgefaßt wird; die Druckdifferenzen senkrecht zur Wand innerhalb der Grenzschicht werden dabei vernachlässigt. Es ist dies die wesentlichste Annahme in der Prandtlschen Theorie, die die Reduktion der Anzahl der Gleichungen, bezw. die der Ordnung des ganzen Problems herbeiführt.

2. Der Impulssatz der Grenzschichttheorie. Um den physikalischen Sinn der Grenzschichttheorie zu übersehen, wollen wir die in den Gleichungen des vorangehenden Abschnittes enthaltenen Aussagen folgendermaßen formulieren:

a) Es soll eine Grenzschichtdicke δ (als Funktion von x) existieren, derart, daß für $y \geq \delta$ keine merkliche Abweichung im Strömungsbild gegenüber der Potentialbewegung vorhanden ist; namentlich kann die x-Komponente u der Geschwindigkeit für $y = \delta(x)$ gleich der Wandgeschwindigkeit der Potentialbewegung u_0 gesetzt werden.

b) Innerhalb der Grenzschicht ist der Druck nur von x abhängig und gleich dem Drucke, der der Potentialströmung längs der Wand entspricht.

Auf Grund der beiden Annahmen a) und b) sind wir in der Lage, den Impulssatz für die x-Richtung auf ein durch die Wand, ein kurzes Stück der Linie $y = \delta(x)$ und zwei zur Wand senkrechte Querschnitte in x und $x + dx$ begrenztes Flüssigkeitsvolumen anzuwenden. (Abb. 1.) Die Zunahme des Impulses ist gleich zu setzen der Resultierenden der äußeren Kräfte, wobei als äußere Kräfte die Druckdifferenz und die Reibung R an der Wand in Betracht kommen. Da für $y = \delta$ die Strömung in die reibungslose Potentialströmung übergeht, können wir die Reibung an der Uebergangsfläche zwischen Grenzschicht und äußerem Feld vernachlässigen.

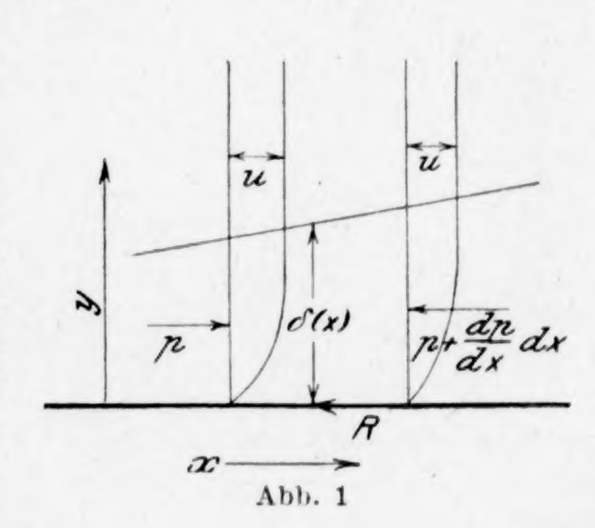


Abb. 1

Wir erhalten somit:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_0^\delta \varrho u\,dy + \frac{\partial}{\partial x}\int_0^\delta \varrho u^2 dy - u_0\frac{\partial}{\partial x}\int_0^\delta \varrho u\,dy = -\delta\frac{\partial p}{\partial x} - R \quad . \; . \; . \; . \quad (5).$$

Zur Deutung der einzelnen Glieder sei bemerkt: $\frac{\partial}{\partial t}\int_0^\delta \varrho u\,dy$ ist die zeitliche Zunahme des in dem betrachteten Volumen enthaltenen Impulses; $\frac{\partial}{\partial x}\int_0^\delta \varrho u^2 dy$ ist der Ueber-

schuß des an der vorderen Stirnfläche ausströmenden Impulses gegenüber der Impulsmenge, die an der hintern Stirnfläche einströmt; $\frac{\partial}{\partial x}\int_0^\delta \varrho u\,dy$ ist die an der Längeneinheit der Seitenfläche $y = \delta(x)$ einströmende Flüssigkeitsmenge, so daß $u_0 \frac{\partial}{\partial x}\int_0^\delta \varrho u\,dy$ den mit dieser Flüssigkeitsmenge eintretenden Impuls angibt.

Für die auf die Flächeneinheit bezogene Reibungskraft R haben wir bei Annahme einer laminaren Strömung zu setzen $R = \tau_0 = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0}$ (τ = Schubspannung in der Flüssigkeit). Wir werden später sehen, daß Gl. (5) auch für turbulente Strömungszustände brauchbar bleibt, falls wir unter u und p die zeitlichen Mittelwerte der Geschwindigkeit und des Druckes verstehen und für τ_0 einen entsprechenden empirischen Ansatz einführen.

Die Gl. (5) können wir natürlich auch durch Integration nach der y-Richtung aus der Differentialgleichung (4) mit Berücksichtigung von (4a) und (4b) ableiten. Sie liefert offenbar, wenn wir für das Geschwindigkeitsprofil $u(y)$ in der Grenzschicht ($0 < y < \delta$) plausible Annahmen einführen, lediglich eine Differentialgleichung für δ, d. h. für die Grenzschichtdicke als Funktion von x und t. Wenn wir uns auf stationäre Vorgänge beschränken, erhalten wir eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung für δ als Funktion von x, so daß wir die Entwicklung der Grenzschicht durch verhältnismäßig einfache Rechnungen verfolgen können. Die nachfolgende Abhandlung von K. Pohlhausen enthält die Berechnungen für eine Reihe praktisch wichtiger Fälle, so daß ich auf dieses Verfahren hier nicht einzugehen brauche. Die Berechnungen von K. Pohlhausen zeigen, daß in allen Fällen, die nach den Prandtlschen partiellen Differentialgleichungen durchgerechnet worden sind, das Annäherungsverfahren mit sehr guter, für die Praxis sicher ausreichender, Annäherung die Ergebnisse wiedergibt, so daß in dieser Weise eine weitere Entwicklung der Theorie auch dort ermöglicht wird, wo die Lösung der partiellen Differentialgleichungen äußerst mühsam, wenn nicht unmöglich ist.

3. Laminare und turbulente Grenzschicht. Der einfachste und praktisch wichtigste Fall, den die Grenzschichttheorie behandelt, ist der Reibungwiderstand einer Platte, die in ruhender Flüssigkeit parallel zu ihrer eigenen Ebene geschleppt wird. Nehmen wir wieder den Fall der ebenen Bewegung und beziehen wir die Bewegung auf die ruhend gedachte Platte, so haben wir folgende Aufgabe: Es ist als Potentialbewegung die Parallelströmung mit der gleichmäßigen Geschwindigkeit U gegeben, die reibende Begrenzung soll im Koordinatenursprung $x = y = 0$ beginnen und für $x \geq 0$ durch die Achse $y = 0$ gegeben sein. Wir haben die Grenzschichtdicke und die Wandreibung als Funktion von x zu berechnen. Diese Aufgabe ist bereits von H. Blasius[1]) gelöst worden; er findet, daß die Grenzschichtdicke wie $\sqrt{x}$ wächst. Rechnet man den Reibungswiderstand für eine Platte von der Länge l und der Breite 1 aus, so erhält man als Reibungskraft (bei beiderseitiger Reibung)

$$W = 1{,}327\sqrt{\mu \varrho l U^3},$$

oder falls man in üblicher Weise

$$W = c_f \gamma F \frac{U^2}{2g} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (7)$$

setzt, indem man den Widerstand auf die Geschwindigkeitshöhe $\frac{U^2}{2g}$, die Oberfläche F und das spez. Gewicht der Flüssigkeit $\gamma = \varrho g$ bezieht:

$$W = 1{,}327\sqrt{\frac{\nu}{Ul}}F\gamma\frac{U^2}{2g} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (8).$$

Der Koffizient des Reibungswiderstandes c_f ist eine Funktion der »Reynoldsschen Zahl« oder »reduzierten Geschwindigkeit« R, falls wir als solche die dimensionslose Größe: Geschwindigkeit $\times$ Plattenlänge dividiert durch Zähigkeitszahl einführen, und zwar haben wir:

$$c_f = 1{,}327\frac{1}{\sqrt{R}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (8a).$$

[1]) Zeitschrift für Mathematik und Physik Bd. 56, 1908, S. 13.

Blasius hat in einer späteren Arbeit[1]) auf Grund von Messungen gezeigt, daß für große Reynoldssche Zahlen die Formel (8) bezw. (8a) nicht mehr gilt, daß vielmehr ein Umschlag in der Gesetzmäßigkeit des Widerstandes und vermutlich im Strömungszustand erfolgt, ähnlich wie es bei der Strömung in Rohren an der kritischen Grenze der Fall ist. Jenseits des Umschlages nimmt der Widerstand stärker als die $^3/_2$ Potenz der Geschwindigkeit zu, d. h. der Widerstandskoeffizient in Gl. (7) nimmt langsamer als $\frac{1}{\sqrt{R}}$ ab.

Wir nehmen nun an, daß die laminare Grenzschicht, für die die Prandtl-Blasiussche Theorie die soeben angegebenen Ergebnisse liefert, durch eine »turbulente Grenzschicht« ersetzt wird, bei der — wie bei der turbulenten Strömung in Rohren — die Geschwindigkeit fortgesetzten Schwankungen nach Größe und Richtung unterworfen ist. Die Folge der Schwankungen ist zunächst die, daß wenn wir die Stromlinien der mittleren Bewegung zeichnen, die Schubspannung nicht allein durch die Gleitung der benachbarten Flüssigkeitsteile bedingt ist; der der Reibung entsprechende Anteil der Schubspannung tritt vielmehr zurück gegen den Impulstransport zufolge der ungeordneten Konvektion der Zusatzgeschwindigkeiten. Es ist bekanntlich bisher nicht gelungen, irgendwie die Natur dieser — offenbar statistischen Gesetzen gehorchenden — Impulskonvektion zu erforschen und die Schwankungserscheinungen der turbulenten Strömung einer theoretischen Berechnung zugänglich zu machen. In dieser Hinsicht trägt zur Lösung des Rätsels auch die vorliegende Abhandlung nichts bei. Was hier unternommen wird, ist nur Folgendes: wir führen für die Verteilung der zeitlichen Mittelwerte der Geschwindigkeit innerhalb der Grenzschicht plausible Annahmen ein, die auf dem empirischen Gesetz der turbulenten Strömung in Rohren fußen, und wenden auf das Gleichgewicht der Grenzschicht die in **2** abgeleitete Impulsgleichung an. Wir gelangen so, wie sich zeigen wird, zu Gesetzmäßigkeiten der turbulenten Reibung an einer geschleppten Platte, die mit der Erfahrung sehr gut übereinstimmen.

4. Die turbulente Strömung in glatten Rohren. Die Gesetze des Strömungswiderstandes in Rohren sind Gegenstand außerordentlich zahlreicher Versuche gewesen. Das empirische Material blieb jedoch bis zur letzten Zeit wenig übersichtlich, weil man vielfach die verschiedenen Grade der Wandrauhigkeit außer acht ließ und die Versuche nicht auf den physikalisch richtigen Parameter, auf den Reynoldsschen Kennwert, bezog[2]). In vielen Fällen wurde wieder nicht berücksichtigt, daß das konstante Geschwindigkeitsprofil im Rohr nur nach einer ziemlich langen »Anlaufstrecke« sich ausbildet. H. Blasius[3]) gebührt das Verdienst, durch Sichtung des Materials und Vergleich der besten Versuche für glatte Rohre eine empirische Formel gefunden zu haben, die in einem großen Bereich die Gesetzmäßigkeit des Strömungswiderstandes sehr genau wiedergibt. Demnach ist der Druckabfall für ein kreisförmiges Rohr bezogen, auf die Geschwindigkeitshöhe der mittleren Geschwindigkeit $\frac{v^2}{2g}$

$$h = \lambda \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g}, \quad \lambda = 0{,}316 \sqrt[4]{\frac{\nu}{v\,d}} \qquad (9)$$

(l = Rohrlänge, d = Rohrdurchmesser).

Der Druckabfall ist nach dieser Formel, die in einem sehr großen Geschwindigkeitsbereich die Versuche sehr gut wiedergibt der $^7/_4$ Potenz der mittleren Geschwindigkeit proportional, während man früher vielfach angenommen hatte, daß das Widerstandsgesetz oberhalb der kritischen Geschwindigkeit sich ziemlich bald dem quadratischen Gesetze nähert. v. Mises hat gelegentlich die Vermutung ausgesprochen[4]), daß gleichzeitig mit wachsender Geschwindigkeit die Geschwindigkeitsverteilung über den Querschnitt immer gleichmäßiger wird, so daß die gemessenen parabelartigen Geschwindigkeitsprofile nur eine Uebergangserscheinung bilden und das Profil sich stetig mit wachsender Geschwindigkeit ändert. In der technischen Literatur wird zumeist stillschweigend

[1]) Mitteilungen über Forschungsarbeiten herausg. vom Verein deutsch. Ing., Heft 131 (1913) S. 1.

[2]) Die bisher einzige Widerstandsformel, die die beiden maßgebenden Variablen, relative Rauhigkeit und Reynoldssche Zahl, in Rechnung setzt, ist die von R. v. Mises, Elemente der technischen Hydromechanik, Leipzig 1914, S. 50 ff.

[3]) S. Fußnote 1.

[4]) R. v. Mises, a. a. O. S. 73.

eine parabelartige, von der Geschwindigkeit unabhängige Verteilung angenommen. Wir stimmen v. Mises so weit bei, daß wir eine mit der Reynoldschen Zahl veränderliche Verteilung annehmen, jedoch mit dem Unterschied, daß wir als asymptotische Form nicht die gleichförmige Verteilung, sondern eine ganz bestimmte Verteilungsfunktion voraussetzen, der sich die Geschwindigkeitsverteilung bei großer Reynoldscher Zahl und bei vollkommen glatten Wänden nähert. Wir nehmen daher an, daß so wie im laminaren Bereich auch im turbulenten, wenigstens bei großen Reynoldschen Zahlen, für die das Widerstandsgesetz (9) gilt, eine sich ähnlich bleibende Geschwindigkeitsverteilung über den Querschnitt besteht, so daß bei Vergrößerung der Durchflußmenge alle Geschwindigkeiten proportional wachsen. Prandtl hat die Frage aufgeworfen, ob man aus dem empirischen Gesetz (9) Folgerungen auf diese Geschwindigkeitsverteilung ziehen kann. Er fand, auf Grund einer Dimensionsbetrachtung, daß unter gewissen plausiblen Voraussetzungen das Widerstandsgesetz die Verteilung der Geschwindigkeit in unmittelbarer Nähe der Wand eindeutig bestimmt. Die Anregung zu der folgenden Betrachtung geht auf eine mündliche Mitteilung von Hrn. Prandtl im Herbst 1920 zurück; die Veröffentlichung erfolgt mit seinem Einverständnis, wobei meine Ableitung etwas von der seinigen verschieden ist.

Um die Vorstellungen zu fixieren, betrachte ich ein Rohr von kreisförmigem Querschnitt. Wird die Geschwindigkeit in der Rohrachse ($r = 0$) mit u_{max} bezeichnet, so bedeutet die Annahme eines von der Durchflußmenge unabhängigen, sich ähnlich vergrößernden Geschwindigkeitsprofils, daß das Verhältnis $\frac{u}{u_{max}}$ eine bestimmte Funktion von $\frac{r}{a}$ allein ist (r = Abstand von der Rohraxe, a = Rohrhalbmesser).

Meine 1. Annahme lautet daher: die Geschwindigkeit im Abstand r von der Rohrachse kann

$$u = u_{max}\,\varphi\left(\frac{r}{a}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

gesetzt werden, wobei $\varphi\left(\frac{r}{a}\right)$ von u_{max} unabhängig ist. Bei Verdoppelung der Geschwindigkeit in der Mitte werden alle Geschwindigkeiten verdoppelt.

Die 2. Annahme soll folgendes aussagen: die Geschwindigkeitsverteilung in der Nähe der Wand, d. h. in der Nähe von $r = a$, soll außer von den physikalischen Konstanten μ und ϱ nur von der Entfernung von der Wand $\eta = a - r$, ferner von der an die Wand übertragenen Schubspannung (Reibungskraft) τ_0 abhängen. Wir setzen also für kleine Werte von η

$$u = f(\mu, \varrho, \tau_0, \eta) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11.)$$

Namentlich soll u für kleine Werte von η unabhängig sein von den Abmessungen des Rohres, d. h. von a. Dieser Annahme liegt die plausible Vorstellung zugrunde, daß die Geschwindigkeitsverteilung in unmittelbarer Nähe einer Wand von den sonstigen Begrenzungen der Strömung unabhängig ist, so daß zwischen der Reibung an einem Wandelement und der unmittelbar benachbarten Geschwindigkeitsverteilung eine eindeutige Beziehung besteht. Wir denken uns Gl. (11) entwickelt nach steigenden Potenzen von η; das erste Glied der Entwicklung soll lauten:

$$u = f_1(\mu, \varrho, \tau_0)\,\eta^{\varkappa} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11\,a),$$

wobei wir $\varkappa$ später bestimmen werden.

Die 3. Annahme enthält das empirische Widerstandsgesetz: bei Verdoppelung der Geschwindigkeit soll der Druckabfall bezw. die Schubspannung an der Wand τ_0 wie $1 : 2^{7/4}$ vergrößert werden.

Die Dimensionsgleichheit der linken und rechten Seite der Gleichung (11 a) kann offenbar nur erhalten bleiben, wenn f die Größen μ, ϱ, τ_0 ebenfalls nur in Potenzen enthält und zwar ist es, wenn man bedenkt, daß $\sqrt{\frac{\tau_0}{\varrho}}$ und $\frac{\nu}{\eta}$ die Dimension von Geschwindigkeiten haben, leicht einzusehen, daß die einzig mögliche dimensionsrichtige Kombination lautet:

$$u = B\left(\frac{\tau_0}{\varrho}\right)^{\frac{1+\varkappa}{2}}\left(\frac{\eta}{\nu}\right)^{\varkappa} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12),$$

wobei B eine dimensionslose Konstante bedeutet.

Da nun andererseits u laut (10) bei Vergrößerung der Durchflußmenge proportional, τ_0 jedoch entsprechend dem Widerstandsgesetz mit der $^7/_4$-Potenz der Durchflußmenge wächst, so muß die Beziehung

$$\frac{1+\varkappa}{2} = {}^4/_7, \quad \varkappa = {}^1/_7 \qquad \qquad (13)$$

gelten.

Wir erhalten daher als erstes Glied einer Entwicklung der Geschwindigkeit als Funktion der Wandentfernung

$$u = B \left(\frac{\tau_0}{\varrho}\right)^{4/7} \left(\frac{\eta}{\nu}\right)^{1/7} \qquad \qquad (12\,a)$$

oder für die Schubkraft, falls $u(\eta)$ die Geschwindigkeitsverteilung in der Wandnähe bezeichnet

$$\tau_0 = \frac{1}{B^{4/7}} \varrho\, \nu^{1/4} \lim_{\eta=0} \left(\frac{u^{7/4}}{\eta^{1/4}}\right) \qquad \qquad (12\,b).$$

B bedeutet dabei eine für glatte Wände gültige universelle Konstante, deren Größe offenbar durch das statistische Gesetz des turbulenten Schwankungsgleichgewichts bedingt ist.

Es wirkt zunächst etwas befremdend, daß der Differentialquotient an der Wand unendlich groß ist. Da an einer glatten Wand keine Impulskonvektion stattfinden kann, weil beide Komponenten der Geschwindigkeit verschwinden, muß die Schubkraft gleich der Reibungskraft $\mu \frac{\partial u}{\partial \eta}$ sein. Dieser Ausdruck wäre nach Gl. (12 a) unendlich. Die Sache klärt sich aber dadurch auf, daß man die Gleichungen (12) bezw. (12 a) als einen asymptotischen Ausdruck für die Geschwindigkeitsverteilung für unendlich große Reynoldssche Zahlen auffassen muß, wie auch das Potenzgesetz für den Strömungswiderstand ein asymptotisches Gesetz für absolut glatte Wände und für sehr große Reynoldssche Zahlen darstellt. Die wahre Geschwindigkeitsverteilung erhält man, indem man etwa zur Geschwindigkeitskurve eine Tangente mit endlicher Neigung zieht, so daß $\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial \eta}$ wird.[1]) Es ist leicht einzusehen, daß mit wachsender Reynoldsscher Zahl der Berührungspunkt dieser Tangente in den Punkt $\eta = 0$ rückt. Es scheint aber, daß die Gleichung (12 a) bereits bei mäßigen Reynoldsschen Zahlen den Geschwindigkeitsverlauf genügend genau wiedergibt.

Die besten Versuche über die Geschwindigkeitsverteilung in einem kreisförmigen Rohre sind zweifellos die von F. E. Stanton[2]), insbesondere weil er erstens sehr feine Pitotröhren zur Geschwindigkeitsmessung verwandt und zweitens eine sehr lange geradlinige Anlaufstrecke vor der Meßstrecke angeordnet hatte, so daß die Messungen mit Sicherheit in dem Bereich lagen, wo das Geschwindigkeitsprofil sich nicht mehr merklich ändert. Abb. 2 zeigt die von Stanton gemessenen Geschwindigkeitswerte (Verhältnis der örtlichen Geschwindigkeit zur Geschwindigkeit in der Rohrachse) als Funktion des Wandabstandes, beide in logarithmischem Maßstab aufgetragen. Man sieht, daß — abgesehen von dem ersten Meßpunkte, der 0,25 mm von der Wand liegt, so daß die Angabe des Pitotrohres,

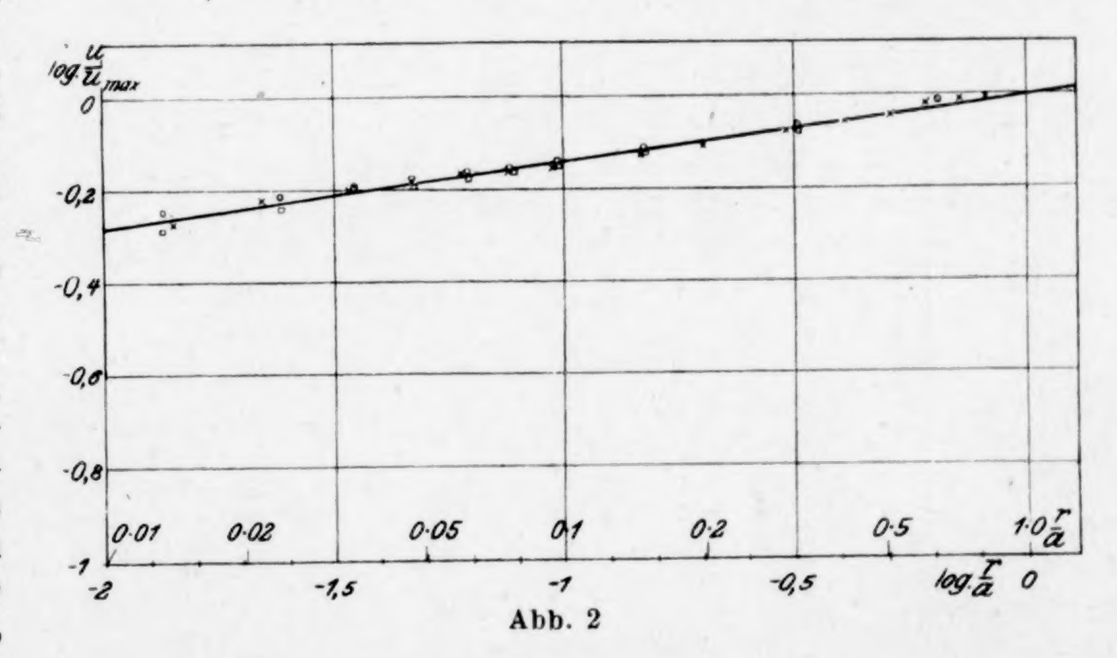


Abb. 2

[1]) Vgl. z. B. die interessanten Messungen von T. E. Stanton, D. Marshall und C. N. Bryant, Proc. Roy. Soc., London, Bd. 97, 1920, S. 413.

[2]) Proceedings of the Royal Society of London Bd. 85, 1911, S. 369.

dessen Durchmesser 0,33 mm beträgt, kaum mehr zuverlässig ist, die Meßpunkte sehr genau an einer Geraden mit $^1/_7$ Neigung liegen [1]).

Für die weiteren Anwendungen haben wir zunächst die Größe B in den Gleichungen (12a) bezw. (12b), die nach unseren Annahmen für glatte Flächen eine universelle Konstante des turbulenten Strömungszustandes bedeutet, zu ermitteln. Zu diesem Zwecke ist eigentlich die Kenntnis des Gesamtverlaufes der Geschwindigkeitsverteilung von der Wandnähe bis zur Rohrmitte erforderlich, während die Formeln für (12a) und (12b) zunächst nur für die Wandnähe gelten. Ich bin so vorgegangen, daß ich zur Berechnung einige geeignete Interpolationsformeln herangezogen habe, die die Geschwindigkeitsverteilung, wie sie von mehreren Experimentatoren gemessen worden sind, gut wiedergeben und an der Wand in die Gleichung (12a) übergehen.

a) Wir erhalten einen extremen Fall, wenn wir die Formeln, welche die Geschwindigkeit als proportial der $^1/_7$-Potenz der Entfernung von der Wand angibt, bis zur Rohrmitte fortsetzen. Wir schreiben daher:

$$u = u_{\max}\left(\frac{a-r}{a}\right)^{1/7} = u_{\max}\left(1-\frac{r}{a}\right)^{1/7} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (13)$$

oder für die Wandnähe

$$u = B\left(\frac{\tau_0}{\varrho}\right)^{4/7}\left(\frac{\eta}{\nu}\right)^{1/7} = u_{\max}\frac{\eta^{1/7}}{a^{1/7}}.$$

Berücksichtigen wir, daß zwischen Druckabfall und Randspannung die Beziehung

$$\frac{dp}{dx}\pi a^2 = 2\pi a \tau_0 \quad \text{bezw.} \quad \tau_0 = \gamma\frac{h}{2l}a$$

besteht, so erhalten wir, indem wir zur Berechnung des Strömungswiderstandes die Blasiussche Formel anwenden:

$$B\left(\frac{\lambda v^2}{8}\right)^{4/7}\frac{1}{\nu^{1/7}} = \frac{U_{\max}}{a^{1/7}}.$$

Das Verhältnis der mittleren Geschwindigkeit v, die in der Blasiusschen Formel vorkommt, zur maximalen Geschwindigkeit beträgt nach dem Ansatz (13)

$$\frac{v}{u_{\max}} = 0{,}816.$$

Wir gelangen so mit $\lambda = 0{,}316\left(\frac{\nu}{v\,d}\right)^{1/4}$ zu dem Werte für die Konstante B

$$B = 2^{1/7}\left(\frac{8}{0{,}316}\right)^{4/7} 0{,}816 = 8{,}57.$$

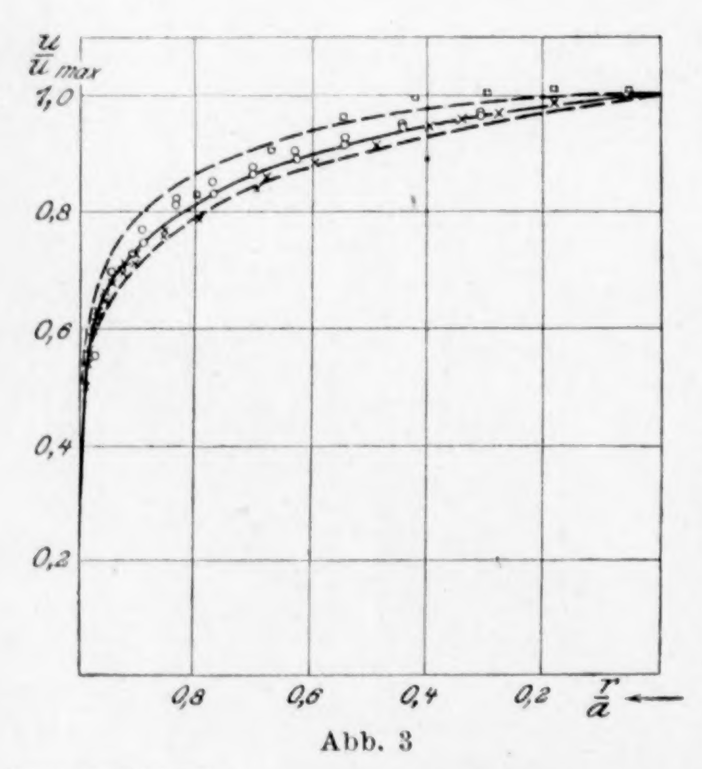


Abb. 3

b) Eine bessere Annäherung an die Messungen erhalten wir, falls wir das Geschwindigkeitsprofil in der Rohrmitte etwas »abrunden«. Man erhält dies am einfachsten durch den Ansatz

$$u = u_{\max}\left(1-\left(\frac{r}{a}\right)^n\right)^{1/7} \quad . \quad (13\,a),$$

wobei wir noch über den Exponenten n verfügen können. $n = 1$ führt offenbar zum Ansatz (13) zurück. In der Abb. 3 sind eine Reihe von Messungen verschiedener Experimentatoren zusammengetragen und die drei Kurven mit $n = 1$, 1,25 und 2 gezeichnet. Man sieht, daß die Versuchspunkte fast ausnahmslos zwischen den beiden Kurven $n = 1$ und $n = 2$ liegen. Führt man den obigen Rechnungsgang mit $n = 1{,}25$ und $n = 2$ durch, so erhält man für die Konstante B

$$B = 8{,}62 \quad \text{mit } n = 1{,}25$$
$$B = 8{,}82 \quad \text{» } n = 2{,}00.$$

1) Es sei bemerkt, daß Christen eine Formel für die Geschwindigkeitsverteilung vorgeschlagen hat, nach der die Geschwindigkeit statt der $^1/_7$-Potenz der $^1/_8$-Potenz der Wandentfernung proportional ist. Vergl. z. B. Zeitschrift für Gewässerkunde Bd. 6 (1904) S. 175. Eine ausführliche Darstellung der verschiedenen Verteilungsformeln findet man bei Forchheimer, Hydraulik, Leipzig 1914. S. 93—119; ferner Gümbel, Jahrbuch der Schiffbautechn. Gesellschaft Bd. 14 (1913) S. 393.

Die Verhältniszahlen $\frac{\text{mittlere Geschwindigkeit}}{\text{maximale Geschwindigkeit}}$ betragen 0,838 für $n = 1{,}25$ und 0,875 für $n = 2$. Die zuverlässigsten Messungen liefern 0,84[1]). Ich schließe daraus, daß der Ansatz (14) mit $n = 1{,}25$ bis 2 die Verhältnisse ziemlich genau wiedergibt, und rechne in den folgenden Zeilen allgemein mit $B = 8{,}7$.

Wir haben daher die Gleichungen (12a) zu schreiben:

$$u = 8{,}7 \left(\frac{\tau_0}{\varrho}\right)^{4/7} \left(\frac{\eta}{\nu}\right)^{1/7} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (14\text{a}).$$

Drücken wir die Schubspannung τ_0 als Funktion der Geschwindigkeit aus, so lautet die Gleichung (12b)

$$\tau_0 = \frac{1}{B^{7/4}} \varrho \lim_{\eta = 0} \left\{ u^2 \left(\frac{\nu}{u\eta}\right)^{1/4} \right\}.$$

Mit den soeben gewonnenen Werten von B auf Grund der drei Interpolationsformeln würde die Gleichung lauten:

$$\tau = 0{,}0225\, \varrho \lim_{\eta = 0} \left\{ u^2 \left(\frac{\nu}{u\eta}\right)^{1/4} \right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (14\text{b}),$$

als allgemeiner Ausdruck für die Randreibung, falls die Geschwindigkeitsverteilung $u(\eta)$ in der Wandnähe bekannt ist.

Die Konstante in Gl. (14b) beträgt 0,0233, wenn man den Ansatz (14) für die Geschwindigkeitsverteilung im Rohr annimmt, dagegen 0,0231 bezw. 0,0221 unter Annahme von (14a) mit $n = 1{,}25$ bezw. $n = 2$.

5. Anwendung auf Wärmeübertragung. Vergleicht man unsere Ansätze mit jenen Darstellungen, welche die turbulente Reibung durch eine scheinbare Erhöhung des Reibungskoeffizienten zum Ausdruck bringen[2]), so setzen wir zunächst allgemein für die Schubspannung, die in einer Schicht in der Entfernung η von der Wand übertragen wird,

$$\tau = g(\eta, \mu, \varrho, u) \frac{d}{dy}(u\varrho) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (15).$$

Falls u als Funktion von η und das Druckgefälle im Rohr bekannt sind, können wir die Funktion g explizite ausrechnen. In der Nähe der Wand muß τ in τ_0 übergehen. Berücksichtigt man (14a), und namentlich die Beziehung: $7\eta \frac{du}{dy} = u$, so erhält man für g:

$$g(\eta, \mu, \varrho) = 0{,}805\, \varrho \left(\frac{\tau_0}{\varrho}\right)^{3/7} \nu^{1/7} \eta^{6/7}.$$

Setzt man nun, wie aus der Gleichgewichtsbestimmung beim kreisförmigen Rohre folgt, $\tau = \tau_0 \frac{r}{a}$, so folgt allgemein:

$$g(\eta, \mu, \varrho) = 0{,}805\, \varrho \left(\frac{\tau_0}{\varrho}\right)^{3/7} \nu^{1/7} Y^{6/7} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (15\text{a}),$$

wobei Y eine Funktion von η allein bezeichnet, die für kleine η in η übergeht. Die Beziehung (15a) gilt für beliebige Querschnitte, falls man annimmt, daß das Verhältnis der Schubspannungen $\frac{\tau}{\tau_0}$ unabhängig von der Geschwindigkeit nur eine Funktion des Ortes ist.

Die Größe g kann als eine Art »turbulenter Reibungskoeffizient« oder besser als »Turbulenzfaktor« bezeichnet werden.

Der Anteil der eigentlichen Reibung ist bei größeren Reynoldsschen Zahlen bis auf eine außerordentlich dünne Schicht an der Wand verschwindend klein, so daß die Schubspannung fast ausschließlich als Mittelwert der Impulskonvektion aufzufassen ist. Diese Auffassung ist deshalb von Interesse, weil sie uns in die Lage versetzt, die von

[1]) Es müssen die Messungen von Gardner J. Williams erwähnt werden (Trans. Am. Soc. Civ. Eng. 1902, auch bei Gümbel loc. cit.), bei welchen die Verhältniszahl bei wachsenden Reynoldsschen Zahlen etwas abnimmt und dann dem Grenzwert 0,811 sich nähert. Dies würde für die einfache Interpolationsformel unter a) sprechen. Es kommen aber auch bedeutend höhere (bis 0,87) Werte vor. Dabei ist der Einfluß der Anlaufstrecke und der Rauhigkeit noch nicht völlig geklärt.

[2]) Vergl. z. B. Boussinesq, Mémoires des savants étrangers B. 23 (1877) S. 1 u. ff., Hahn, Herglotz und Schwarzschild, Zeitschrift für Math. Phys. 51, 1904, S. 411.

Reynolds[1]) und Prandtl[2]) entdeckte Analogie zwischen Reibungswiderstand und Wärmeübertragung bei turbulenter Strömung weiter auszubauen. Nehmen wir an, daß die Impulsübertragung und die Wärmeübertragung durch denselben Mechanismus der ungeordneten molaren Schwankungsbewegung geschieht, so erhalten wir offenbar zwei analoge Ansätze für die senkrecht zur Strömung durch »turbulente Impulsleitung« pro Flächeneinheit übertragene Schubkraft und für die durch »turbulente Wärmeleitung« übertragene Wärmemenge:

$$\tau = 0{,}805 \left(\frac{\tau_0}{\varrho}\right)^{3/7} \nu^{1/7}\, Y^{6/7} \frac{d(\varrho u)}{d y}, \qquad q = 0{,}805 \left(\frac{\tau_0}{\varrho}\right)^{3/7} \nu^{1/7}\, Y^{6/7} \frac{d(c \varrho \Theta)}{d y} \quad . \quad . \quad (15\mathrm{a}),$$

wobei c die spez. Wärme, Θ die Temperatur, folglich $c\Theta$ den Wärmeinhalt der Masseneinheit bedeutet. Es muß dabei bemerkt werden, daß der Ansatz (15a) mit guter Annäherung bis zur Wand fortgesetzt werden darf, wenn dieselbe Proportionalität, die wir für den Mechanismus der »turbulenten Impuls- und Wärmeübertragung« annehmen, auch für die molekulare Impuls- und Wärmeübertragung, d. h. für die laminare innere Reibung und für die eigentliche Wärmeleitung besteht. Wie bereits Prandtl hervorgehoben hat, äußert sich dies in der Tatsache, daß für die betreffende Flüssigkeit zwischen Wärmeleitzahl λ, Reibungskoeffizienten μ und spezifischer Wärme c die Beziehung $\frac{c\mu}{\lambda} = 1$ besteht. Diese Beziehung ist für Gase angenähert erfüllt. Ist $\frac{c\mu}{\lambda}$ von 1 sehr verschieden, wie z. B. bei Wasser, so kann der Ansatz nur bis zur Grenze der unmittelbar an der Wand befindlichen laminaren Schicht erstreckt werden, während der Einfluß dieser Schicht — wie an anderer Stelle näher ausgeführt werden soll — durch eine Randbedingung ersetzt werden kann.

Der Ansatz (15a) erlaubt nun, die Wärmeübertragung in allen Fällen zu rechnen, in denen das für die zeitlichen Mittelwerte geltende »Geschwindigkeitsfeld« der turbulenten Strömung und somit g bekannt ist. Mit Hilfe dieses Ansatzes hat H. Latzko[3]) eine Reihe von technisch wichtigen Fällen der Wärmeübertragung an turbulente Ströme durchgerechnet. Es gelingt insbesondere, zu zeigen, daß von einer »Wärmeübergangszahl« schlechthin, wie es in der Technik zumeist geschieht, nicht gesprochen werden kann, daß vielmehr die Wärmeübertragung durch die Gesamtanordnung bedingt ist. Es gelingt auch, den Einfluß der einzelnen Faktoren klarzulegen und dadurch das vielfach sich widersprechende experimentelle Material zu ordnen. In dieser Hinsicht erscheint die Berechnungsmöglichkeit der Wärmeübertragungsvorgänge über die erwähnten Prandtlschen Analogieschlüsse hinaus wesentlich erweitert, da bei den letzteren eine vollkommene Uebereinstimmung des Geschwindigkeits- und Temperaturfeldes angenommen werden mußte, während mit Hilfe unseres Ansatzes auch die Abweichungen zwischen beiden der Berechnung zugänglich gemacht werden.

6. Die turbulente Grenzschicht an der ebenen Platte. Wir wollen nun die aus der Betrachtung der turbulenten Strömung in Rohren gewonnenen Ergebnisse zur Berechnung des turbulenten Reibungswiderstandes einer Platte auf die längs derselben bestehende Grenzschichtströmung übertragen. Wir legen allen folgenden Berechnungen die oben abgeleiteten Gleichungen (14a) und (14b) zugrunde, nach denen einerseits die Geschwindigkeitsverteilung als Funktion der Entfernung von der Wand

$$u = 8{,}7 \left(\frac{\tau_0}{\varrho}\right)^{4/7} \left(\frac{\eta}{\nu}\right)^{1/7} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14\mathrm{a})$$

falls τ_0, die an der Wand übertragene Schubspannung gegeben ist, andererseits die Schubspannung τ_0

$$\tau_0 = 0{,}0225\, \varrho u^2 \left(\frac{\nu}{u\eta}\right)^{1/4} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14\mathrm{b})$$

beträgt, wenn $u(\eta)$ die Geschwindigkeitsverteilung in der Nähe der Wand darstellt. Wollen wir diese Beziehungen auf die »turbulente Grenzschicht« übertragen, so haben

[1]) Proceedings, Manchester Lit. and Phil. Soc 1874, p. 9. On the passage of heat between metal surfaces and liquids in contact with them. Phil. Transact. of the Roy. Soc. Vol 190.

[2]) Eine Beziehung zwischen Wärmeaustausch und Strömungswiderstand der Flüssigkeit. Physik. Zeitschr. 11, 1910, S. 1072.

[3]) Vergl. dieses Heft, S. 268 bis 290.

wir einen entsprechenden Ansatz für die Geschwindigkeitsverteilung aufzustellen. Wird die Grenzschichtdicke wiederum mit δ bezeichnet und die Geschwindigkeit der ungestörten Bewegung mit U, die Entfernung von der Wand mit y, so lautet der einfachste Ansatz:

$$u = U\left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/7} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (16).$$

Setzen wir (16) mit (14a) gleich, so ist offenbar

$$8{,}7\left(\frac{\tau_0}{\varrho}\right)^{4/7}\frac{1}{\nu^{1/7}} = \frac{U}{\delta^{1/7}},$$

d. h. wir erhalten für die Schubspannung τ_0 den Ausdruck:

$$\tau_0 = 0{,}0225\,\varrho\,U^2\left(\frac{\nu}{U\delta}\right)^{1/4} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (17).$$

Gl. (17) liefert uns den Ansatz, den wir als Reibungskraft in die Impulsgleichung der Grenzschicht einzuführen haben, um eine Theorie der turbulenten Grenzschicht zu gewinnen, die die Prandtl-Blasiussche Theorie der laminaren Grenzschicht ersetzen soll. Setzen wir in der Tat (17) in Gl. (5) ein, so haben wir zunächst

$$\frac{d}{dx}\int_0^\delta \varrho u^2 dy - U\frac{d}{dx}\int_0^\delta \varrho u\,dy = 0{,}0225\,\varrho\,U^2\left(\frac{\nu}{U\delta}\right)^{1/4}.$$

Ermitteln wir die Integrale $\int_0^\delta u\,dy$ und $\int_0^\delta u^2 dy$ mit Hilfe des Ansatzes (16), so erhalten wir als Differentialgleichung der Grenzschichtdicke

$$\frac{7}{72}\frac{d\delta}{dx} = 0{,}0225\left(\frac{\nu}{U\delta}\right)^{1/4}.$$

Die Lösung dieser Differentialgleichung lautet:

$$\delta = \left(\frac{90}{7}\right)^{4/5}(0{,}0225)^{4/5}\left(\frac{\nu}{U}\right)^{1/5} x^{4/5} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (18)$$

oder für die Länge l

$$\delta_l = 0{,}37\,l\left(\frac{\nu}{Ul}\right)^{1/5} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (18\,a).$$

Während die laminare Grenzschicht mit $\sqrt{x}$ proportional wächst, nimmt die turbulente Grenzschicht nach Gl. (18) mit $x^{4/5}$ zu.

Wir sind nun in der Lage, den Reibungswiderstand einer Platte von der Länge l zu berechnen und zwar entweder durch Integration der Reibungskräfte längs der Platte oder durch Anwendung des Impulssatzes auf den Endquerschnitt bei $x = l$. Der Widerstand (doppelseitig) ergibt sich offenbar zu:

$$W = \frac{7}{36}\varrho\,U^2\delta_l = 0{,}036\,\varrho\,U^2 l\left(\frac{\nu}{Ul}\right)^{1/5} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (19).$$

Beziehen wir die Widerstandskraft durch die Formel

$$W = c_f F\gamma\frac{U^2}{2g}$$

wieder auf die Geschwindigkeitshöhe, so erhalten wir für den Widerstandskoeffizienten c_f das Resultat:

$$c_f = 0{,}072\frac{1}{R^{0,2}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (19\,a),$$

wobei die Reynoldssche Zahl R wieder $R = \frac{Ul}{\nu}$ gesetzt wurde.[1])

[1]) Herr Prandtl hat nach einer brieflichen Mitteilung die Formel (19a) bereits vor mir besessen. Er gibt (vgl. Ergebnisse der aerodynamischen Versuchsanstalt zu Göttingen, I. Lieferung, München und Berlin 1921, S. 136) eine ähnliche Formel mit einem ergänzenden Gliede an, welches dem Umstande Rechnung trägt, daß am Vorderende einer gut zugeschärften Platte Laminarströmung herrschen kann. Indem er die Zahlenfaktoren aus älteren Versuchen von Gebers ermittelt, gibt er die Formel $c_f = 0{,}073\frac{1}{R^{0,2}} - \frac{1600}{R}$ an, wobei der Zahlenfaktor im zweiten Glied im allgemeinen von der Zuschärfung abhängt und bei abgerundeter Vorderkante praktisch verschwindend klein sein soll.

In der Abb. 4 sind die Versuchsergebnisse von Gibbons und Wieselsberger[1]) mit verhältnismäßig glatten Platten eingetragen, ferner die Linie für c_f nach Gl. (19a), wobei sowohl für die Reynoldssche Zahl als für den Widerstandskoeffizienten ein logarithmischer Maßstab gewählt ist. Man sieht, daß die Uebereinstimmung außerordentlich gut ist.[2])

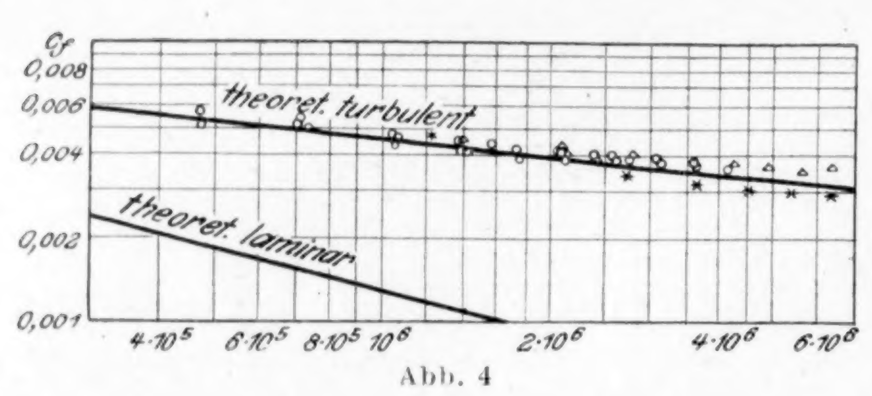


Abb. 4

Eine ebenso gute Bestätigung der soeben durchgeführten Berechnungen liefern die Geschwindigkeitsmessungen in der Nähe eines geschleppten Brettes. So stellen die Punkte in Abb. 5 die gemessene Geschwindigkeitsverteilung senkrecht zu einem im Wasser geschleppten Brett als Funktion des Abstandes von der Wand dar und zwar in einem 8,56 m hinter der Vorderkante durchgelegten Querschnitte[3]). Die ausgezogene Linie liefert die Geschwindigkeitsverteilung nach Gl. (16), wobei die Grenzschichtdicke nach Gl. (18) gerechnet wurde. Aus dem Vergleich der Meßergebnisse mit der nach Ansatz (16) angenommenen Kurve sieht man vor allem, daß es keineswegs notwendig ist, wie dies in der technischen Literatur zumeist geschieht, einen Geschwindigkeitssprung an der Wand anzunehmen. Durch unsere Ansätze wird vielmehr der rasche Abfall der Geschwindigkeit in unmittelbarer Nähe der Wand durch den Verlauf der Potenzkurve mit dem Exponenten $^1/_7$ richtig und zwanglos dargestellt.

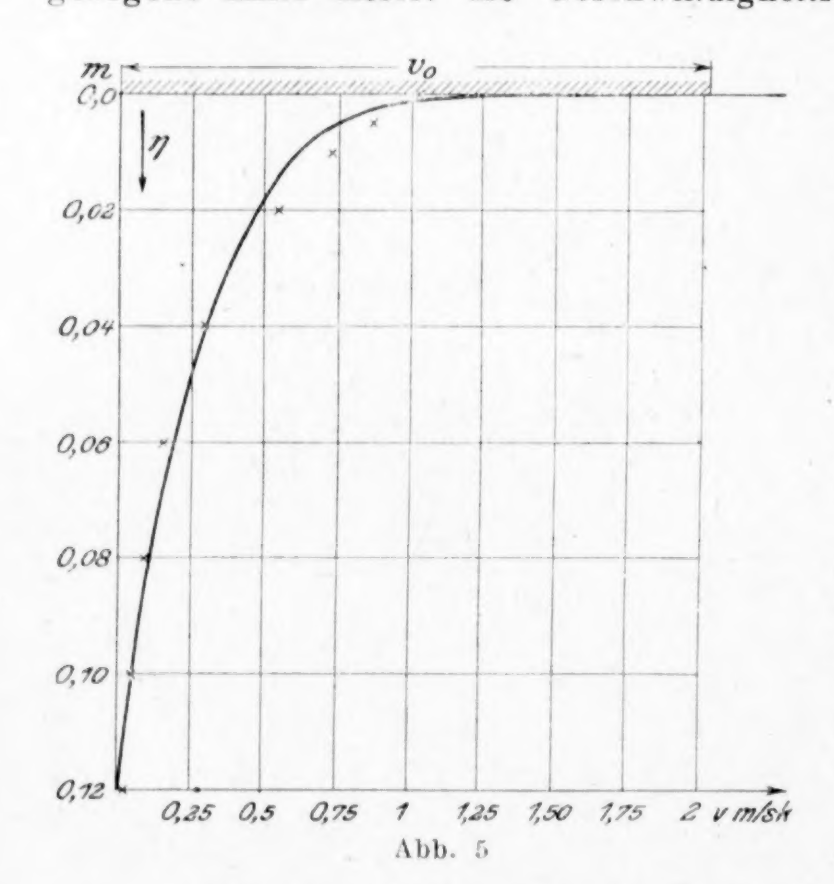


Abb. 5

7. Laminare Reibung an einer rotierenden Scheibe. Als weiteres Beispiel zur Anwendung der für die Berechnung laminarer und turbulenter Reibungswiderstände gewonnenen Methoden will ich den Fall einer gleichmäßig rotierenden ebenen Scheibe behandeln. Der laminare Strömungszustand, der durch eine rotierende ebene Scheibe hervorgerufen wird, besitzt aus dem Grunde besonderes Interesse, weil er einen der seltenen Fälle darstellt, in denen die Differentialgleichungen der zähen Flüssigkeiten ohne Vernachlässigungen integriert werden können. Man ist also hier in der Lage, unmittelbar beurteilen zu können, mit welcher Genauigkeit die Prandtlschen Grenzschichtgleichungen eine Annäherung liefern.

Ich stelle mir folgende Aufgabe:

Der Halbraum $x > 0$ soll von Flüssigkeit erfüllt sein. Die Begrenzungsebene $x = 0$ rotiert um die x-Achse mit der gleichförmigen Drehgeschwindigkeit ω. Wir fragen nach dem Bewegungszustand in dem Halbraum $x > 0$ mit Berücksichtigung der Flüssigkeitsreibung.

Wir führen Zylinderkoordinaten r, ϑ, x ein und bezeichnen mit c_r, c_t, c_x die Geschwindigkeitskomponenten nach der radialen, tangentiellen und axialen Richtung; p bedeute den Flüssigkeitsdruck. Die Differentialgleichungen der Strömung in Zylinderkoordinaten — wenn alle Geschwindigkeiten von ϑ unabhängig sind, wie aus Symmetriegründen folgt, — lauten:

---

[1]) Vergl. »Ergebnisse der aerodynamischen Versuchsanstalt zu Göttingen« I. Lieferung S. 123.

[2]) Gebers (Schiffbau 22, 1921, S. 687 ff., insbes. S. 791) gelangt zu etwas höheren Exponenten. Ich vermute, daß beim Schleppen sehr langer Platten Erzitterungen nicht zu vermeiden sind, was den Widerstand rascher wachsen läßt.

[3]) Gümbel, Das Problem des Oberflächenwiderstandes, Jahrbuch der schiffbautechnischen Gesellschaft Bd. 1913 S. 478.

$$\left.\begin{aligned} c_r \frac{\partial c_r}{\partial r} + c_x \frac{\partial c_x}{\partial x} - \frac{c_t^2}{r} &= -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left\{\frac{\partial^2 c_r}{\partial r^2} + \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{c_r}{r}\right) + \frac{\partial^2 c_r}{\partial x^2}\right\} \\ c_r \frac{\partial c_t}{\partial r} + c_x \frac{\partial c_t}{\partial x} + \frac{2\, c_t c_r}{r} &= \nu \left\{\frac{\partial^2 c_t}{\partial r^2} + \frac{3}{r}\frac{\partial c_t}{\partial r} + \frac{\partial^2 c_t}{\partial x^2}\right\} \\ c_r \frac{\partial c_x}{\partial r} + c_x \frac{\partial c_x}{\partial x} &= -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left\{\frac{\partial^2 c_x}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial c_x}{\partial r} + \frac{\partial^2 c_x}{\partial x^2}\right\} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (20)$$

und die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial c_r}{\partial r} + \frac{c_r}{r} + \frac{\partial c_x}{\partial x} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20\,\mathrm{a}).$$

Man erkennt an dem Bau der Gleichungen, daß man das System (20) und (20a) durch den Ansatz:

$$c_r = r f(x), \quad c_t = r g(x), \quad c_x = h(x), \quad p = p(x) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

befriedigen kann, so daß man für die drei Funktionen f, g, h die gewöhnlichen simultanen Differentialgleichungen

$$f^2 - g^2 + h\frac{df}{dx} = \nu \frac{d^2 f}{dx^2}, \qquad 2\,fg + h\frac{dg}{dx} = \nu\frac{d^2 g}{dx^2}, \qquad \frac{dh}{dx} + 2\,f = 0 \quad . \quad . \quad (22)$$

erhält, während die Gleichung

$$h\frac{dh}{dx} = -\frac{1}{\varrho}\frac{dp}{dx} + \nu\frac{d^2 h}{dx^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (23)$$

die aus der dritten Gleichung des Systems (20) entstanden ist, die Druckverteilung $p(x)$ bestimmt.

Das System der Randbedingungen lautet offenbar, da die Flüssigkeit im Unendlichen keine Rotation besitzen, dagegen für $x = 0$ an der rotierenden Wand haften soll,

$$\begin{aligned} f(0) &= 0, \qquad & f(\infty) &= 0, \\ g(0) &= \omega, & g(\infty) &= 0. \\ h(0) &= 0, \end{aligned}$$

Die Funktion $h(x)$ hat für $x = \infty$ einen endlichen Grenzwert. Dies bedeutet so viel, wie daß eine ständige Zuströmung gegen die rotierende Wand stattfindet, wie es auch aus Gründen der Kontinuität zu erwarten ist. Die rotierende Wand wirkt infolge des Haftens der Flüssigkeit als eine Art Schleuderventilator; in unmittelbarer Nähe der Wand wird die Flüssigkeit ständig nach außen befördert, so daß die Flüssigkeitsmenge durch axiale Zuströmung ersetzt werden muß.

Führen wir, um dimensionslose Größen zu erhalten, als unabhängige Variable

$$\xi = x\sqrt{\frac{\omega}{\nu}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24)$$

und statt f, g, h die Funktionen $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$,

$$\mathfrak{f} = \frac{f}{\omega}, \quad \mathfrak{g} = \frac{g}{\omega}, \quad \mathfrak{h} = \frac{h}{\sqrt{\nu\omega}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24\,\mathrm{a})$$

ein, so erhalten wir statt (22) das Gleichungssystem:

$$\mathfrak{f}^2 - \mathfrak{g}^2 + \mathfrak{h}\frac{df}{d\xi} = \frac{d^2 f}{d\xi^2}, \qquad 2\,\mathfrak{f}\mathfrak{g} + \mathfrak{h}\frac{d\mathfrak{g}}{d\xi} = \frac{d^2\mathfrak{g}}{d\xi^2}, \qquad \frac{d\mathfrak{h}}{dx} + 2\,f = 0 \quad . \quad . \quad (22\,\mathrm{a})$$

mit den Randbedingungen:

$$\begin{aligned} &\mathfrak{f} = 0, \ \mathfrak{g} = 1, \ \mathfrak{h} = 0 \ \text{für} \ \xi = 0, \\ &\mathfrak{f} = 0, \ \mathfrak{g} = 0 \ \text{für} \ \xi = \infty, \end{aligned}$$

so daß die Gleichungen von sämtlichen speziellen Daten der Aufgabe unabhängig sind. Wir ersehen daraus die Aehnlichkeitsgesetze der Aufgabe. Da $\mathfrak{g}(\xi)$ die Verhältniszahl der Drehgeschwindigkeit in der Entfernung $x = \xi\sqrt{\frac{\nu}{\omega}}$ von der Wand zu der Drehgeschwindigkeit ω bezeichnet, so ist es klar, daß mit wachsender Geschwindigkeit nur in einer Schicht an der Wand merkliche Rotationsgeschwindigkeiten zu beobachten sind, die mit wachsender Geschwindigkeit und abnehmender Zähigkeit wie $\sqrt{\frac{\nu}{\omega}}$ abnehmen. Andererseits folgt aus der letzten der Gleichungen (24a), daß die axiale Zuströmungsgeschwindigkeit im Unendlichen wie $\sqrt{\nu\omega}$ zunimmt.

Das Gleichungssystem (22) kann durch ein beliebiges numerisches Verfahren oder durch Reihenentwicklung gelöst werden. Wir ziehen jedoch vor, das in § 3 angedeutete

und in der Arbeit von K. Pohlhausen[1]) ausgeführte Verfahren anzuwenden und dadurch eine erste Näherung zu gewinnen. Wir nehmen an, daß die Funktionen $\mathfrak{f}$ und $\mathfrak{g}$ in der Entfernnng δ von der Wand bereits unmerklich wenig sich von Null unterscheiden. Aus den Ansätzen (21) folgt, daß die »Grensschichtdicke« in unserm Falle längs der Wand konstant ist, so daß δ von ξ nicht abhängt. Wir integrieren die beiden ersten Gleichungen des Systems (22a) zwischen $\xi = 0$ und $x = \delta$, d. h. $\xi = \delta \sqrt{\frac{\omega}{\nu}} = \xi_0$. Alsdann haben wir:

$$\left.\begin{aligned} \int_0^{\xi_0} (\mathfrak{f}^2 - \mathfrak{g}^2)\, d\xi + \int_0^{\xi_0} \mathfrak{h} \frac{d\mathfrak{f}}{d\xi} d\xi &= \left[\frac{d\mathfrak{f}}{d\xi}\right]_0^{\xi_0} \\ \int_0^{\xi_0} 2\,\mathfrak{f}\mathfrak{g}\, d\xi + \int_0^{\xi_0} \mathfrak{h} \frac{d\mathfrak{g}}{d\xi} &= \left[\frac{d\mathfrak{g}}{d\xi}\right]_0^{\xi_0} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (25).$$

Wir integrieren das zweite Integral partiell und berücksichtigen, daß nach der letzten Gleichung des Systems (22a) $\frac{d\mathfrak{h}}{d\xi}$ durch $-2f$ ersetzt werden kann.

So erhalten wir schließlich:

$$3\int_0^{\xi_0} \mathfrak{f}^2 d\xi - \int_0^{\xi_0} \mathfrak{g}\, d\xi = -\left[\frac{d\mathfrak{f}}{d\xi}\right]_0, \quad 4\int_0^{\xi_0} \mathfrak{f}\mathfrak{g}\, d\xi = -\left[\frac{d\mathfrak{g}}{d\xi}\right]_0 \quad \ldots\ldots (26).$$

Als angenäherte Ausdrücke für die Funktionen $\mathfrak{f}$ und $\mathfrak{g}$ setzen wir an:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{f} &= a\frac{\xi}{\xi_0}\left(1-\frac{\xi}{\xi_0}\right)^2\left(1+2\frac{\xi}{\xi_0}\right) - {}^1\!/_2 \left(\frac{\xi}{\xi_0}\right)^2\left(1-\frac{\xi}{\xi_0}\right)^2, \\ \mathfrak{g} &= {}^1\!/_2\left(2+\frac{\xi}{\xi_0}\right)\left(1-\frac{\xi}{\xi_0}\right) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (27),$$

wobei a eine zu bestimmende Konstante bedeutet.

Dabei haben wir berücksichtigt, daß

$$\mathfrak{f} = 0, \quad \mathfrak{g} = 1 \text{ für } \xi = 0$$
$$\mathfrak{f} = \frac{d\mathfrak{f}}{d\xi}, \quad \mathfrak{g} = \frac{d\mathfrak{g}}{d\xi} \text{ für } \xi = \delta$$

gilt und außerdem, wie aus den Gleichungen (22a) leicht einzusehen ist,

$$\frac{d^2\mathfrak{f}}{d\xi^2} = -1, \quad \frac{d^2\mathfrak{g}}{d\xi^2} = 0 \text{ für } \xi = 0$$

sein muß.

Ermitteln wir die in (26) enthaltenen Integrale numerisch, so bekommen wir:

$$\left.\begin{aligned} \int_0^{\xi_0} \mathfrak{f}^2 d\xi &= \xi_0\,[0{,}0301\,a^2 - 0{,}00326\,a + 0{,}00159] \\ \int_0^{\xi_0} \mathfrak{g}^2 d\xi &= \xi_0 \cdot 0{,}2357 \\ \int_0^{\xi_0} \mathfrak{f}\mathfrak{g}\, d\xi &= \xi_0\,[0{,}0607\,a - 0{,}00567] \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (28),$$

und wenn wir diese Ausdrücke in (26) einsetzen, erhalten wir zwei gewöhnliche Gleichungen für a und ξ_0, die lauten:

$$\left.\begin{aligned} 0{,}0903\,a^2 - 0{,}00978\,a - 0{,}23093 &= -\frac{a}{\xi_0^2} \\ 0{,}2428\,a - 0{,}02328 &= \frac{3}{2\xi_0^2} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (29).$$

Die numerische Auflösung liefert:

$$a = 1{,}026, \quad \xi_0 = 2{,}58 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (30)$$

[1]) Dieses Heft S. 252 bis 268.

Auf Grund dieser Ergebnisse sind wir in der Lage, die Grenzschichtdicke δ und die axiale Zuströmungsgeschwindigkeit c_∞ im Unendlichen zu berechnen. Es gilt offenbar:

$$\delta = \xi_0 \sqrt{\frac{\nu}{\omega}} = 2{,}58 \sqrt{\frac{\nu}{\omega}}, \quad - c_\infty = \omega \int_0^{\xi_0} 2 \mathfrak{f} \, d\xi = 0{,}708 \sqrt{\nu \omega} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (31).$$

Nehmen wir z. B. Luft als Flüssigkeit mit $\nu = 0{,}14$ cm²/sec und eine Drehzahl $n = 600$ min, d. h. $\omega = \frac{2 \pi n}{60} = 62{,}8$ sec, so wäre die Grenzschichtdicke nach (31)

$$\delta = 0{,}122 \text{ ccm}$$

und die axiale Zuströmgeschwindigkeit:

$$c_\infty = - 7{,}6 \text{ cm/sec.}$$

Die wichtigste Aufgabe ist die Berechnung des Reibungswiderstandes. Wenn wir die Wand mit $r = a$ begrenzt annehmen, so erhalten wir offenbar den Fall einer rotierenden Scheibe mit dem Halbmesser a. Auf die Bewegung der Flüssigkeit kann nun der Umstand, daß die äußeren Teile der Ebene $x = 0$ fehlen, nicht gänzlich ohne Einfluß sein, doch ist es anzunehmen, daß, wenn die Dicke der Grenzschicht gegen den Halbmesser der Scheibe sehr klein ist, wie es in fast allen praktischen Fällen zutrifft, diese Beeinflussung unerheblich bleibt. Unter dieser Annahme können wir einfach das Moment der an der Scheibe wirkenden Schubkräfte von $r = 0$ bis $r = a$ integrieren, oder, was zu demselben Resultat führen muß, den Drehimpuls, der in der Zeiteinheit mit der Flüssigkeit an der Zylinderfläche $r = a$ austritt, berechnen und dem Moment der Reibungskräfte gleich setzen. Wir wählen den zweiten Weg. Wir haben als Drehimpuls der an der Zylinderfläche in der Zeiteinheit austretenden Flüssigkeit:

$$D = 2 \pi a^2 \varrho \int_0^\delta c_x c_r \, dx = M \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (32),$$

oder nach den Ansätzen (21), (24) unb (24 a):

$$M = 2 \pi a^4 \varrho \, \omega^{3/2} \nu^{1/2} \int_0^{\xi_0} \mathfrak{f} \mathfrak{g} \, d\xi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (32\text{a}).$$

Das Integral $\int_0^{\xi_0} \mathfrak{f} \mathfrak{g} \, d\xi$ haben wir bereits oben berechnet. Setzen wir seinen Wert aus (28) ein, so erhalten wir:

$$M = 0{,}92 \, a^4 \varrho \, \nu^{3/2} \omega^{1/2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (33)$$

oder

$$M = 1{,}84 \, a^3 \frac{U^2}{2g} \frac{1}{\sqrt{R}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (33\text{a}),$$

falls die Umfangsgeschwindigkeit mit $U = a \omega$, und als Reynoldssche Kennziffer $R = \frac{U a}{\nu}$ eingeführt wird.

Um den Widerstand einer zweiseitig durch Flüssigkeit umgebenen Scheibe zu erhalten, müssen wir den Ausdruck (33) naturgemäß doppelt in Rechnung setzen.

8. Reibungswiderstand einer rotierenden Scheibe bei turbulenter Flüssigkeitsbewegung. Die in (33) gefundene Gesetzmäßigkeit: ein mit der Potenz $^3/_2$ der Drehzahl proportionales Reibungsmoment wird bei höheren Drehzahlen durch die Erfahrung nicht bestätigt. Man mißt vielmehr eine bedeutend raschere Zunahme des Widerstandsmomentes mit der Drehgeschwindigkeit. Wir machen wieder, wie bei den gegeschleppten ebenen Platten die Annahme, daß es sich um eine »turbulente Grenzschicht« handelt, und versuchen durch Anwendung des Impulssatzes einen angenäherten Wert für die Grenzschichtdicke und den Reibungswiderstand zu gewinnen.

In dem Falle der rotierenden Scheibe haben wir zwei Gleichgewichtsbedingungen aufzustellen, einmal in der radialen Richtung und dann in der tangentiellen Richtung.

Wir wollen die Bezeichnungen des vorangehenden Abschnittes beibehalten; außerdem bezeichnen wir die Reibungskräfte, die an der Flächeneinheit der Wand wirken, mit τ_r und τ_t, Abb. 6. Alsdann haben wir in der radialen Richtung folgende Impulsgrößen:

a) Ueberschuß der austretenden Impulsmenge an der Zylinderfläche $(r+d\,r)\,\delta$ (für ein Bogenelement von dem Oeffnungswinkel Eins) gegenüber der an der Fläche $r\,\delta$ eintretenden Impulsmenge

$$\frac{d}{d\,r}\left\{r\,\varrho\int\limits_0^\delta c_r^{\,2}\,d\,x\right\}d\,r.$$

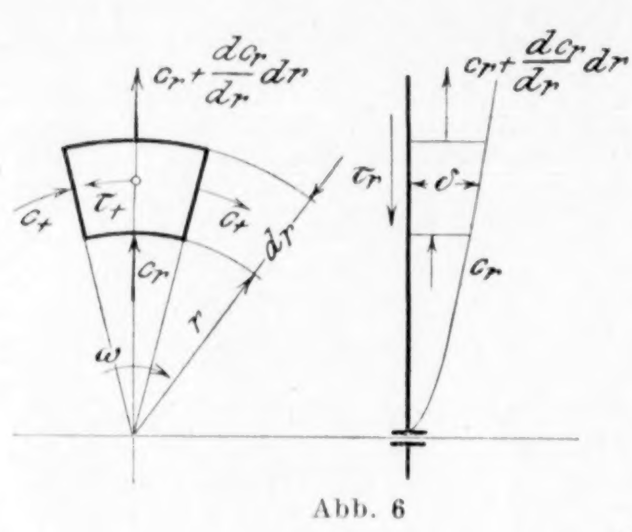


Abb. 6

b) Die radiale Komponente der an der Stirnfläche ein- bezw. austretenden Impulsmenge (gleich der Zentrifugalkraft der rotierenden Flüssigkeitsmenge)

$$-\left(\varrho\int\limits_0^\delta c_t^{\,2}\,dx\right)d\,r.$$

Diese Impulsgrößen müssen mit der Schubkraft $\tau_r\,r\,d\,r$ im Gleichgewicht stehen, so daß wir erhalten:

$$\varrho\,\frac{d}{d\,r}\left\{r\int\limits_0^\delta c_r^{\,2}d\,x\right\}-\varrho\int\limits_0^\delta c_t^{\,2}\,d\,x=-\tau_r\,r \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (34).$$

In der tangentiellen Richtung können wir die Differenz des Drehmomentes des an der ganzen Zylinderfläche $2\,\pi\,(r+d\,r)\,\delta$ aus- und an der Fläche $2\,\pi\,r\,d$ eintretenden Impulses berechnen und sie dem Drehmoment der an der Ringfläche wirkenden Reibungskräfte gleichsetzen. Wir erhalten offenbar:

$$2\,\pi\,\frac{d}{d\,r}\left\{r^2\int\limits_0^\delta c_r\,c_t\,d\,x\right\}=-\tau_t\,2\,\pi\,r^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (35).$$

Als Ansätze für die Geschwindigkeitsverteilung führe ich ein, gemäß den Ausführungen in § 4

$$c_r=c_0\left(\frac{x}{\delta}\right)^{1/7}\left(1-\frac{x}{\delta}\right),\qquad c_t=r\,\omega\left[1-\left(\frac{x}{\delta}\right)^{1/7}\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (36),$$

wobei bereits berücksichtigt ist, daß

$$\text{für } x=0 \quad c_r=0,\quad c_t=r\,\omega;\quad \text{für } x=\delta \quad c_r=c_t=0$$

sein muß.

Alsdann können wir die Integrale in den Gleichungen (34) und (35) auswerten und wir erhalten:

$$\int\limits_0^\delta c_r^{\,2}\,d\,x=0{,}207\,c_0^{\,2}\delta\,,\qquad \int\limits_0^\delta c_r\,c_t\,d\,x=0{,}0681\,r\,\omega\,c_0\,\delta,\qquad \int\limits_0^\delta c_t^{\,2}\,d\,x=0{,}0278\,r^2\omega^2\delta \quad (37).$$

Fernerhin setzen wir gemäß unseren Voraussetzungen über das Maß der turbulenten Reibung Gl. (146), indem wir die Geschwindigkeitskomponenten an der Wand zusammensetzen und für die Resultierende unseren Reibungsansatz anwenden:

$$\tau_r=0{,}0225\,\varrho\,\frac{c_0^{7/4}\,\nu^{1/4}}{\delta^{1/4}}\left[1+\left(\frac{r\,\omega}{c_0}\right)^2\right]^{3/8},\qquad \tau_t=0{,}0225\,\varrho\,(r\,\omega)^{7/4}\,\frac{\nu^{1/4}}{\delta^{1/4}}\left[1+\left(\frac{c_0}{r\,\omega}\right)^2\right]^{5/8}.$$

Mit diesen Ansätzen erhalten wir aus Gl. 34 und (35) die beiden Differentialgleichungen

$$\frac{d}{d\,r}\left\{0.207\,c_0^{\,2}\,r\,\delta\right\}-0{,}0278\,r^2\,\omega^2\,\delta=-0{,}0225\,c_0^{\,2}\,r\left(\frac{\nu}{c_0\,\delta}\right)^{1/4}\left[1+\left(\frac{r\,\omega}{c_0}\right)^2\right]^{3/8}$$

$$\frac{d}{d\,r}\left[0{,}0681\,r^3\,\omega\,c_0\,\delta\right]=0{,}0225\,r^4\,\omega^2\left(\frac{\nu}{r\,\omega\,\delta}\right)^{1/4}\left[1+\left(\frac{c_0}{r\,\omega}\right)^2\right]^{3/8}.$$

Man sieht zunächst, daß die Gleichungen befriedigt werden, wenn wir für die Abhängigkeit der Grenzschichtdicke von der Achsenentfernung r setzen:

$$\left.\begin{aligned}c_0&=\alpha\,r\,\omega\\ \delta&=\beta\,r^{3/5}\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (38)$$

und wir erhalten zwei gewöhnliche Gleichungen für α und β ganz analog dem Gleichungssystem (29) im vorangehenden Abschnitt.

Die Gleichungen lauten:

$$0{,}7456\,\alpha^2\beta - 0{,}0278\,\beta = -0{,}0225\,\alpha^2\left(\frac{\nu}{\alpha\beta\omega}\right)^{1/4}\left(1+\frac{1}{\alpha^2}\right)^{3/8}$$

$$0{,}3133\,\alpha\beta = 0{,}0225\left(\frac{\nu}{\beta\omega}\right)^{1/4}(1+\alpha^2)^{3/8} \quad . \quad . \quad . \quad (39)$$

Aus den beiden Gleichungen folgt zunächst durch Division:

$$1{,}0589\,\alpha^2 - 0{,}0278 \doteq 0.$$

Die numerische Auflösung liefert:

$$\alpha = 0{,}162 \text{ und daraus } \beta = 0{,}462\left(\frac{\nu}{\omega}\right)^{1/5} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (40).$$

Mit diesen Werten wird die Grenzschichtdicke:

$$\delta = 0{,}462\, r\left(\frac{\nu}{r^2\omega}\right)^{1/5}.$$

Nun können wir nach dem Verfahren des vorangehenden Abschnittes oder auf Grund der Gleichung (35) das Widerstandsmoment rechnen und erhalten:

$$M = 2\pi a^2 \varrho \int_0^\delta c_r c_t\, d x = 0{,}0364\, a^5\omega^2\varrho\left(\frac{\nu}{a^2\omega}\right)^{1/5} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (41)$$

und für die doppelseitige Reibung:

$$M = 0{,}0728\, a^5\omega^2\varrho\left(\frac{\nu}{a^2\omega}\right)^{1/5} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (41\text{a}).$$

Wir wollen wieder im Einklang mit den Berechnungen über den Schleppwiderstand von Platten alle Reibungswiderstände auf das Geschwindigkeitsquadrat bezw. auf Geschwindigkeitshöhe beziehen. Bedeutet U die Umfangsgeschwindigkeit der Scheibe, so wird das Moment

$$M = 0{,}146\,\gamma\frac{U^2}{2g}a^3\left(\frac{\nu}{U a}\right)^{1/5} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (42)$$

oder die Widerstandsziffer c_f als Funktion der »Reynoldsschen Kennziffer« der Scheibe $R = \frac{U a}{\nu}$.

$$c_f = 0{,}146\frac{1}{\sqrt[5]{R}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (43).$$

In Abb. 7 ist c_f als Funktion der Reynoldsschen Kennziffer R — beide in logarithmischem Maßstabe — aufgetragen. Dieselbe Abbildung enthält auch die aus der Berechnung der laminaren Grenzschicht nach Gl. (33a) sich ergebende Widerstandsziffer:

$$c_f = \frac{3{.}68}{\sqrt{R}} \quad . \quad (44).$$

Die experimentellen Daten sind aus einer jüngst erschienenen Arbeit von W. Schmidt[1]) über Reibungswiderstand von glatten Scheiben in Wasser, entnommen. Man sieht, daß die Versuchsresultate der theoretischen Berechnung gut entsprechen. Insbesondere ist es von Interesse, daß die Messungen

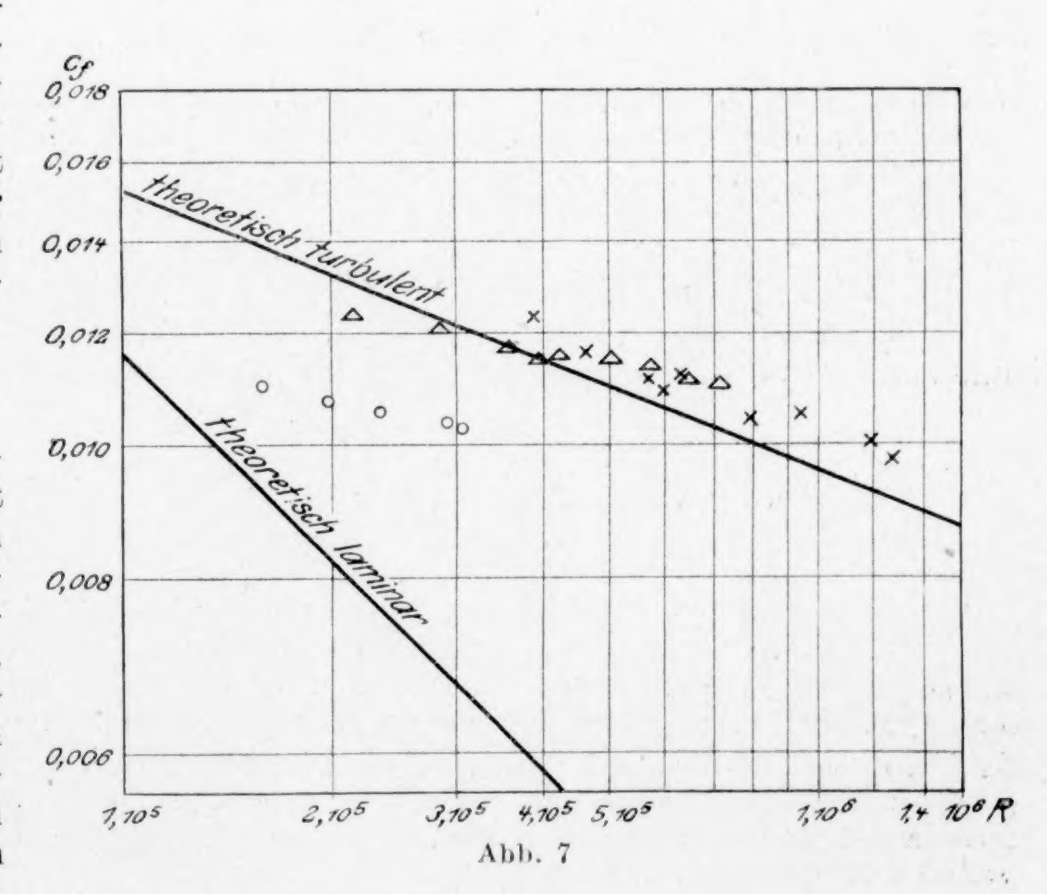


Abb. 7

[1]) Z. d. V d Ing. Bd. 65, 1921, S. 441.

a) Ueberschuß der austretenden Impulsmenge an der Zylinderfläche $(r + d\,r)\,\delta$ (für ein Bogenelement von dem Oeffnungswinkel Eins) gegenüber der an der Fläche $r\,\delta$ eintretenden Impulsmenge

$$\frac{d}{d\,r}\left\{r\,\varrho\int_0^\delta c_r^2\,d\,x\right\}d\,r\,.$$

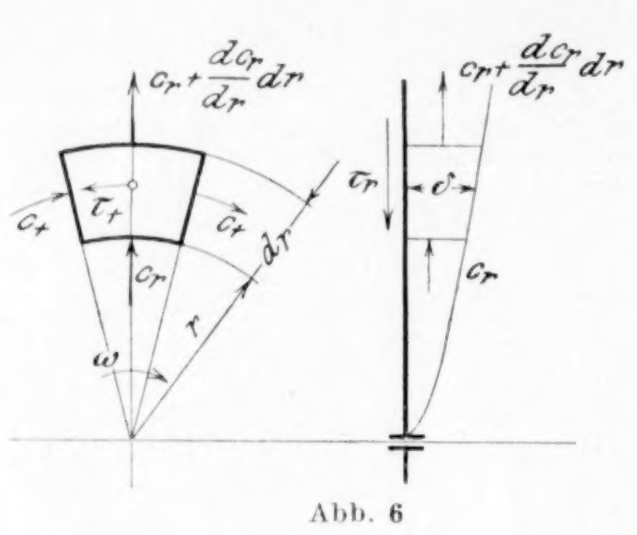


Abb. 6

b) Die radiale Komponente der an der Stirnfläche ein- bezw. austretenden Impulsmenge (gleich der Zentrifugalkraft der rotierenden Flüssigkeitsmenge)

$$-\left(\varrho\int_0^\delta c_t^2\,dx\right)d\,r.$$

Diese Impulsgrößen müssen mit der Schubkraft $\tau_r\,r\,d\,r$ im Gleichgewicht stehen, so daß wir erhalten:

$$\varrho\,\frac{d}{d\,r}\left\{r\int_0^\delta c_r^2 dx\right\} - \varrho\int_0^\delta c_t^2\,d\,x = -\,\tau_r\,r\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(34).$$

In der tangentiellen Richtung können wir die Differenz des Drehmomentes des an der ganzen Zylinderfläche $2\,\pi\,(r + d\,r)\,\delta$ aus- und an der Fläche $2\,\pi\,r\,d$ eintretenden Impulses berechnen und sie dem Drehmoment der an der Ringfläche wirkenden Reibungskräfte gleichsetzen. Wir erhalten offenbar:

$$2\,\pi\,\frac{d}{d\,r}\left\{r^2\int_0^\delta c_r\,c_t\,d\,x\right\} = -\,\tau_t\,2\,\pi\,r^2\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(35).$$

Als Ansätze für die Geschwindigkeitsverteilung führe ich ein, gemäß den Ausführungen in § 4

$$c_r = c_0\left(\frac{x}{\delta}\right)^{1/7}\left(1 - \frac{x}{\delta}\right),\qquad c_t = r\,\omega\left[1 - \left(\frac{x}{\delta}\right)^{1/7}\right]\;.\;.\;.\;.\;(36),$$

wobei bereits berücksichtigt ist, daß

für $x = 0$ $c_r = 0$, $c_t = r\,\omega$; für $x = \delta$ $c_r = c_t = 0$

sein muß.

Alsdann können wir die Integrale in den Gleichungen (34) und (35) auswerten und wir erhalten:

$$\int_0^\delta c_r^2\,d\,x = 0{,}207\,c_0^2\,\delta\;,\qquad \int_0^\delta c_r\,c_t\,d\,x = 0{,}0681\,r\,\omega\,c_0\,\delta,\qquad \int_0^\delta c_t^2\,d\,x = 0{,}0278\,r^2\,\omega^2\,\delta\quad(37).$$

Fernerhin setzen wir gemäß unseren Voraussetzungen über das Maß der turbulenten Reibung Gl. (14b), indem wir die Geschwindigkeitskomponenten an der Wand zusammensetzen und für die Resultierende unseren Reibungsansatz anwenden:

$$\tau_r = 0{,}0225\,\varrho\,\frac{c_0^{7/4}\,\nu^{1/4}}{\delta^{1/4}}\left[1 + \left(\frac{r\,\omega}{c_0}\right)^2\right]^{3/8},\qquad \tau_t = 0{,}0225\,\varrho\,(r\,\omega)^{7/4}\,\frac{\nu^{1/4}}{\delta^{1/4}}\left[1 + \left(\frac{c_0}{r\,\omega}\right)^2\right]^{3/8}.$$

Mit diesen Ansätzen erhalten wir aus Gl. 34 und (35) die beiden Differentialgleichungen

$$\frac{d}{d\,r}\left\{0.207\,c_0^2\,r\,\delta\right\} - 0{,}0278\,r^2\,\omega^2\,\delta = -\,0{,}0225\,c_0^2\,r\left(\frac{\nu}{c_0\,\delta}\right)^{1/4}\left[1 + \left(\frac{r\,\omega}{c_0}\right)^2\right]^{3/8}$$

$$\frac{d}{d\,r}\left[0{,}0681\,r^3\,\omega\,c_0\,\delta\right] = 0{,}0225\,r^4\,\omega^2\left(\frac{\nu}{r\,\omega\,\delta}\right)^{1/4}\left[1 + \left(\frac{c_0}{r\,\omega}\right)^2\right]^{3/8}.$$

Man sieht zunächst, daß die Gleichungen befriedigt werden, wenn wir für die Abhängigkeit der Grenzschichtdicke von der Achsenentfernung r setzen:

$$\left.\begin{aligned} c_0 &= \alpha\,r\,\omega \\ \delta &= \beta\,r^{3/5} \end{aligned}\right\}\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(38)$$

und wir erhalten zwei gewöhnliche Gleichungen für α und β ganz analog dem Gleichungssystem (29) im vorangehenden Abschnitt.

Die Gleichungen lauten:

$$0{,}7456\,\alpha^2\beta - 0{,}0278\,\beta = -0{,}0225\,\alpha^2\left(\frac{\nu}{\alpha\beta\omega}\right)^{1/4}\left(1+\frac{1}{\alpha^2}\right)^{3/8}$$

$$0{,}3133\,\alpha\beta = 0{,}0225\left(\frac{\nu}{\beta\omega}\right)^{1/4}(1+\alpha^2)^{3/8} \quad . \quad . \quad . \quad (39)$$

Aus den beiden Gleichungen folgt zunächst durch Division:

$$1{,}0589\,\alpha^2 - 0{,}0278 = 0.$$

Die numerische Auflösung liefert:

$$\alpha = 0{,}162 \text{ und daraus } \beta = 0{,}462\left(\frac{\nu}{\omega}\right)^{1/5} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (40).$$

Mit diesen Werten wird die Grenzschichtdicke:

$$\delta = 0{,}462\,r\left(\frac{\nu}{r^2\omega}\right)^{1/5}.$$

Nun können wir nach dem Verfahren des vorangehenden Abschnittes oder auf Grund der Gleichung (35) das Widerstandsmoment rechnen und erhalten:

$$M = 2\pi a^2 \varrho \int_0^\delta c_r c_t\,dx = 0{,}0364\,a^5\omega^2\varrho\left(\frac{\nu}{a^2\omega}\right)^{1/5} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (41)$$

und für die doppelseitige Reibung:

$$M = 0{,}0728\,a^5\omega^2\varrho\left(\frac{\nu}{a^2\omega}\right)^{1/5} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (41\,a).$$

Wir wollen wieder im Einklang mit den Berechnungen über den Schleppwiderstand von Platten alle Reibungswiderstände auf das Geschwindigkeitsquadrat bezw. auf Geschwindigkeitshöhe beziehen. Bedeutet U die Umfangsgeschwindigkeit der Scheibe, so wird das Moment

$$M = 0{,}146\,\gamma\frac{U^2}{2g}a^3\left(\frac{\nu}{U a}\right)^{1/5} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (42)$$

oder die Widerstandsziffer c_f als Funktion der »Reynoldsschen Kennziffer« der Scheibe $R = \frac{U a}{\nu}$.

$$c_f = 0{,}146\,\frac{1}{\sqrt[5]{R}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (43).$$

In Abb. 7 ist c_f als Funktion der Reynoldsschen Kennziffer R — beide in logarithmischem Maßstabe — aufgetragen. Dieselbe Abbildung enthält auch die aus der Berechnung der laminaren Grenzschicht nach Gl. (33a) sich ergebende Widerstandsziffer:

$$c_f = \frac{3{,}68}{\sqrt{R}} \quad . \quad (44).$$

Die experimentellen Daten sind aus einer jüngst erschienenen Arbeit von W. Schmidt[1]) über Reibungswiderstand von glatten Scheiben in Wasser, entnommen. Man sieht, daß die Versuchsresultate der theoretischen Berechnung gut entsprechen. Insbesondere ist es von Interesse, daß die Messungen

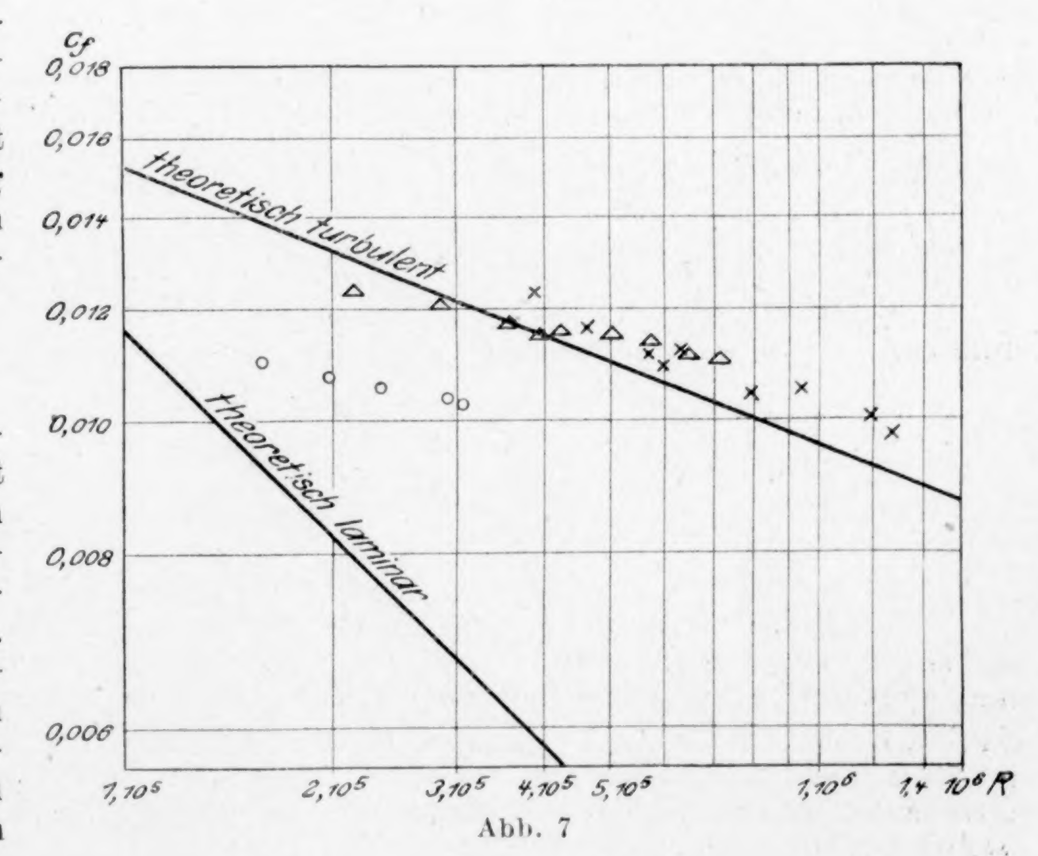


Abb. 7

[1]) Z. d. V. d. Ing. Bd. 65, 1921, S. 441.

bei kleineren Reynoldsschen Zahlen gerade in das Uebergangsgebiet zwischen Laminarströmung und turbulenter Strömung fallen[1]).

8. Bemerkungen über Rauhigkeit. Während bei vollkommen glatten Rohren das Blasiussche Widerstandsgesetz anscheinend in einem großen Geschwindigkeitsbereich gültig ist, so daß es als mehr denn eine Interpolationsformel erscheint, erhält man bei Rohren mit rauher Wandung bald nach Ueberschreitung des kritischen Punktes eine annähernd quadratische Abhängigkeit des Druckgefälles von der Geschwindigkeit. Für diesen Zustand kann man für das Druckgefälle setzen:

$$h = \lambda\left(\frac{\varepsilon}{d}\right)\frac{v^2}{2g}\frac{l}{d} \qquad \text{(45)},$$

wobei λ eine Funktion der relativen Rauhigkeit $\frac{\varepsilon}{d}$ bedeutet. Mit ε bezeichnen wir eine Größe von der Dimension einer Länge, die gewissermaßen die mittlere Erhöhung der Wandrauhigkeit mißt; das Verhältnis dieser Größe zum Rohrdurchmesser wollen wir mit v. Mises[2]) als »relative Rauhigkeit« bezeichnen.

Das quadratische Gesetz für rauhe Wände ist schon dadurch plausibel, daß man sich den Reibungswiderstand aus den Einzelwiderständen der Wanderhöhungen zusammengesetzt denkt, die einzeln dem quadratischen Gesetz gehorchen. Der Mechanismus des Reibungswiderstandes ist in diesen Fällen offenbar durch regelmäßige Ablösung von Wirbeln ganz bestimmter Intensität und Abmessungen bedingt, wie dies bei Strömungen an Widerstandskörpern der Fall ist.

Man kann nun versuchen, demgegenüber den Strömungswiderstand in vollkommen glatten Rohren sich so vorzustellen, daß in diesem Falle Wirbel verschiedenster Größe sich ablösen und in dem turbulenten Strom regellos herumschwimmen, wobei die Häufigkeit der Wirbel verschiedener Intensität und verschiedener Abmessungen durch ein uns unbekanntes statistisches Gesetz geregelt wird.

Den Reibungswiderstand in glatten Rohren kann man nach dieser Auffassung als zusammengesetzt ansehen aus den Reibungswiderständen, die den einzelnen Wirbelgattungen entsprechen. Nehmen wir an, daß zwischen den Wirbelgrößen und der Rauhigkeit eine Beziehung besteht, so können wir auch sagen: der Reibungswiderstand in glatten Rohren kann aus den bei rauhen Rohren beobachteten, mit der Geschwindigkeit quadratisch wachsenden Einzelwiderständen durch Superposition gewonnen werden, falls wir die einzelnen quadratischen Widerstände mit richtigen Gewichten in Rechnung setzen.

Es ist nicht ohne Interesse, daß man auf Grund dieser Auffassung auf die Gestalt der Funktion $\lambda\left(\frac{\varepsilon}{d}\right)$ Schlüsse ziehen kann, und zwar ohne daß man das Häufigkeitsgesetz bezw. die Gewichtsfunktion der Einzelwiderstände kennen würde.

Insbesondere kann man zeigen, daß falls das Blasiussche Gesetz für glatte Rohre zu Recht besteht, die Funktion $\lambda\left(\frac{\varepsilon}{d}\right)$ wenigstens für kleine Werte von $\frac{\varepsilon}{d}$ die Formel $\lambda_0\left(\frac{\varepsilon}{d}\right)^{2/7}$ haben muß, wobei λ_0 eine Konstante bezeichnet.

Wenn wir die quadratischen Widerstände nach (45) unter Annahme einer Gewichtsfunktion $\varphi(\varepsilon)$ superponieren, so wird das Widerstandsgesetz für glatte Rohre lauten[3]):

$$h = \frac{\int_0^\infty \lambda\left(\frac{\varepsilon}{d}\right)\varphi(\varepsilon)\,d\varepsilon}{\int_0^\infty \varphi(\varepsilon)\,d\varepsilon}\,\frac{l}{d}\,\frac{v^2}{2g} \qquad \text{(46)}.$$

[1]) Die Versuche von Odell (Engineering, Bd. 77, 1904, S. 33 und von A. Stodola (Die Dampfturbinen 4. Auflage, Berlin 1910, S. 120—129) über die Reibung rotierender Scheiben in Luft liefern um etwa 20 bis 30 vH höhere Werte und eine raschere Zunahme der Reibung mit der Umfangsgeschwindigkeit. (Bei Odell $\sim \omega^{2+\varepsilon}$, wobei ε eine kleine positive Zahl ist, bei Stodola $\omega^{1,9}$ statt $\omega^{1,8}$). Die Versuche von Odell sind sicher zweifelhaft, weil die Papierscheiben, welche er angewendet hat, flattern und dadurch einen größeren Reibungswiderstand vortäuschen. Bei Stodola scheint der höhere Exponent der Rauhigkeit der Scheibe zu entsprechen.

[2]) Elemente der techn. Hydromechanik, Leipzig 1914, S. 50.

[3]) Daß die Integration bis ∞ erstreckt wird, ist nur Formsache, $\varphi(\varepsilon)$ nimmt eben mit wachsender ε sehr stark ab, bezw. ist von einem bestimmten Werte von ε ab gleich Null.

Ich nehme nun an, daß die Funktion $\varphi(\varepsilon)$ für Werte von ε, die gegen den Rohrdurchmesser klein sind, nur von den physikalischen Konstanten und der Geschwindigkeitsverteilung in unmittelbarer Nähe der Wandelemente abhängt. Insbesondere soll daher $\varphi(\varepsilon)$ unabhängig von dem Rohrdurchmesser sein. Die unmittelbar der Wand benachbarte Geschwindigkeitsverteilung ist jedoch nach unseren früheren Annahmen vollkommen bedingt durch die Schubspannung an dem betreffenden Wandelement. Ich setze also:

$$\varphi(\varepsilon) = \varphi(\varepsilon, \mu, \varrho, \tau_0).$$

Aus den vier Größen kann nur **eine** dimensionslose Kombination gebildet werden, nämlich:

$$z = \left(\frac{\tau_0}{\varrho}\right)^{1/2} \frac{\varepsilon}{\nu} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (47).$$

Wir setzen also:

$$\varphi(\varepsilon) = \varphi\left[\frac{\varepsilon}{\nu}\sqrt{\frac{\tau_0}{\varrho}}\right], \qquad h = \frac{l}{d}\frac{v^2}{2g}\frac{\int_0^\infty \lambda\left(\frac{\varepsilon}{d}\right)\varphi\left(\sqrt{\frac{\tau_0}{\varrho}}\frac{\varepsilon}{\nu}\right)d\varepsilon}{\int_0^\infty \varphi\left(\sqrt{\frac{\tau_0}{\varrho}}\frac{\varepsilon}{\nu}\right)d\varepsilon}.$$

Führen wir z als Variable ein, so erhalten wir

$$h = \frac{l}{d}\frac{v^2}{2g}\frac{\int_0^\infty \lambda\left(\frac{\varepsilon}{d}\right)\varphi(z)\,dz}{\int_0^\infty \varphi(z)\,dz}.$$

Setzen wir $\lambda = \lambda_0\left(\frac{\varepsilon}{d}\right)^m$, so wird:

$$h = \frac{l}{d}\frac{v^2}{2g}\lambda_0\frac{\int_0^\infty z^n\varphi(z)\,dz}{\int_0^\infty \varphi(z)\,dz}\frac{\nu^m\varrho^{m/2}}{d^m\,\tau_0^{m/2}} = K\frac{l}{d}\frac{v^2}{2g}\frac{\nu^m\varrho^{m/2}}{d^m\,\tau_0^{m/2}} \quad \ldots \ldots \quad (48),$$

wobei $K = \lambda_0\frac{\int_0^\infty z^n\varphi(z)\,dz}{\int_0^\infty \varphi(z)\,dz}$ eine reine Zahl ist.

Berücksichtigen wir, daß zwischen h und τ_0 die Beziehung:

$$\gamma h\frac{d^2\pi}{4} = d\pi\tau_0 l \quad \text{oder} \quad \tau_0 = \frac{\gamma h d}{4l}$$

besteht, so erhalten wir

$$h\left(1 + \frac{m}{2}\right)\frac{\gamma^{m/2}d^{m/2}}{4^{m/2}\,l^{m/2}} = K\frac{l}{d^{1+m}}\frac{v^2}{2g}\nu^m\varrho^{m/2}.$$

Lösen wir die Gleichung nach h auf, so haben wir:

$$h = \left(\frac{K}{2}\right)^{\frac{2}{2+m}}\frac{l}{d}\frac{v^2}{2g}\left(\frac{\nu}{dv}\right)^{\frac{2m}{2+m}} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (49).$$

Dieses Gesetz entspricht genau dem Blasiusschen Widerstandsgesetz für glatte Rohre, falls wir setzen:

$$\frac{2m}{2+m} = {}^1/_4$$

oder

$$m = {}^2/_7.\text{[1]}$$

Führt man für die Gewichtsfunktion φ einen bestimmten Ansatz — etwa nach Art des Fehlergesetzes — ein, so kann man die Beziehung zwischen den Konstanten des für das glatte Rohr gültigen Blasiusschen Gesetzes mit den Konstsnten des Rauhigkeits-

[1] Herr Prandtl teilt mir mit, daß er dasselbe Ergebnis auf ganz anderem Wege erhalten hat.

gesetzes berechnen. Ich hoffe, auf die Weiterentwicklung dieser Ueberlegungen bald zurückkommen zu können.

Führen wir andererseits das Gesetz $\lambda = \lambda_0 \left(\frac{\varepsilon}{d}\right)^{2/7}$ in (45) ein, so haben wir mit $\lambda_0 \varepsilon^{2/7} = \zeta$

$$h = \zeta \frac{l}{d^{9/7}} \frac{v^2}{2g}$$

oder

$$v \sim \sqrt{\frac{h}{l}\, d^{9/7}} \simeq \left(\frac{h}{l}\right)^{0,5} d^{0,64}\,.$$

Nach der Analogie zwischen Rohren und Kanälen würde für die Geschwindigkeit in einem Kanal mit dem Gefälle J und dem hydraulischen Radius P die Formel gelten:

$$v = \text{konst. } J^{0,5}\, P^{0,64}\,.$$

Es sei bemerkt, daß nach R. Manning die empirische Formel $v = \text{konst. } J^{0,5}\, P^{0,66}$, nach Forchheimer $v = \text{konst. } J^{0,5}\, P^{0,7}$, schließlich nach Hermanek die Formel $v = \text{konst. } J^{0,5}\, P^{0,6}$ die Versuchsresultate in rauhen Kanälen gut wiedergibt [1]. 84

Zur näherungsweisen Integration der Differentialgleichung der laminaren Grenzschicht.

Von K. POHLHAUSEN in Aachen.

Die außerordentlichen mathematischen Schwierigkeiten, die bei der Integration der Differentialgleichungen der Flüssigkeitsbewegung, besonders bei Berücksichtigung der Reibung, auftreten, und die im wesentlichen im nichtlinearen Charakter dieser Gleichungen begründet sind, haben in der geschichtlichen Entwicklung der Lehre von der Flüssigkeitsbewegung eine Trennung zwischen »Hydrodynamik« und »Hydraulik« bewirkt. Auf der einen Seite vernachlässigt man die Reibung, um zu einfacheren Gleichungen zu gelangen, und erkauft die Strenge mit wesentlichen Abweichungen der berechneten Strömung von der beobachteten. Auf der andern Seite entwickelte die Technik, die zu einer Beurteilung des wirklichen Verhaltens einer Flüssigkeit gezwungen ist, in der Hydraulik eine eigene Lehre von den Bewegungen einer Flüssigkeit. Hier werden die exakten Gleichungen durch empirische Annahmen und anschauliche Betrachtungen ersetzt, deren Ergebnisse im wesentlichen mit der Wirklichkeit übereinstimmen.

Erst in neuerer Zeit bemüht man sich, die Hydrodynamik mit der Hydraulik in Einklang zu bringen, und zwar durch Berücksichtigung der Reibung in der mathematischen Theorie und durch Vertiefung der hydraulischen Betrachtungen. Die ersten allgemeinen Ansätze, bei denen die Reibung Berücksichtigung fand, wurden von Stokes [2] gemacht, dem es unter anderm gelungen ist, den Widerstand einer Kugel in einer Flüssigkeit von sehr großer Zähigkeit zu berechnen. Voraussetzung dieser Lösung war, daß die Bewegung im wesentlichen durch die Zähigkeit bestimmt wird, daß also entweder die Zähigkeit sehr groß oder das Produkt aus Körperabmessung und Geschwindigkeit sehr klein ist. Für die Bewegung einer Flüssigkeit mit geringer Zähigkeit gab zuerst Prandtl [3] eine systematische Vereinfachung, die zu der Theorie der »Grenzschicht« führte und von seinen Schülern Blasius [4], Boltze [5] und Hiemenz [6] im einzelnen ausgeführt und auf Beispiele angewandt wurde.

---

[1] Vergl. Ph. Forchheimer, Hydraulik, Leipzig 1914, S. 70 u. ff.

[2] G. Stokes: On the effect of the internal friction of fluids on the motion of pendulums Camb. Trans. 9, 1851 (Sc. papers Bd. 3, S. 1).

[3] L. Prandtl: Verhandl. des III. intern. Math. Kongreß 1904 (Heidelberg) Leipzig 1905, S. 484.

[4] H. Blasius: Dissertation Göttingen 1907. Zeitschr. für Math. u. Phys. 56, 1908, S. 1.

[5] E. Boltze: Dissertation Göttingen 1908.

[6] K. Hiemenz: Dissertation Göttingen 1911. Dinglers polyt. Journal Bd. 326, 1911, S. 321.

Im folgenden soll für die Differentialgleichung der Grenzschicht ein näherungsweises Integrationsverfahren entwickelt und dessen Brauchbarkeit an Beispielen gezeigt werden.

1. Ableitung der Differentialgleichung der Grenzschicht. Prandtl betrachtet die Bewegung einer Flüssigkeit, die einen eingetauchten ruhenden Körper umströmt, oder die dadurch entsteht, daß ein Körper geradlinig mit unveränderlicher Geschwindigkeit in ruhender Flüssigkeit bewegt wird. Er gelangt dadurch zur Differentialgleichung der Grenzschicht, daß er die Konstante der inneren Reibung als sehr klein annimmt. In großer Entfernung von dem umströmten Körper wird dann die Reibung keinen Einfluß haben und also annähernd eine Potentialbewegung sich einstellen. Nur in einer sehr dünnen Schicht am Körper, der »Grenzschicht«, werden Abweichungen von der Potentialbewegung deshalb stattfinden, weil an der Wand selbst die Flüssigkeit haften soll. Bezeichnet man die Dicke dieser Grenzschicht mit δ, so lassen sich die einzelnen Glieder der strengen Differentialgleichungen in ihrer Größenordnung abschätzen. Die Vernachlässigung aller Glieder geringerer Größenordnung führt, wie Blasius im einzelnen gezeigt hat, auf die Prandtlsche Differentialgleichung der Grenzschicht.

Wir wollen hier dieselbe Differentialgleichung auf etwas andere Weise durch eine asymptotische Näherung gewinnen.[1]) Wir gehen aus von dem Navier-Stokesschen Ansatz, dem die Bewegung einer Flüssigkeit mit Reibung genügt, und beschränken uns auf stationäre Vorgänge in der Ebene, wobei wir zunächst nur für die Strömung längs der Geraden $y = 0$ die Rechnung durchführen wollen. Die Gleichungen lauten wie bekannt:

$$\left.\begin{aligned} u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu \Delta u \\ u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial y} + \nu \Delta v \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0. \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (1).$$

Dabei soll die Flüssigkeit an der als eben angenommenen Wand des Körpers haften, es soll also $u = 0$, $v = 0$ für $y = 0$ gelten.

Die Kontinuitätsgleichung integriert man durch Einführung der Stromfunktion ψ derart, daß

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \qquad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

und erhält dann aus den beiden ersten Gleichungen (1):

$$\frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{\partial \Delta \psi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial \Delta \psi}{\partial y} = \nu \Delta \Delta \psi \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (2).$$

Wir führen dimensionslose Größen ein, indem wir alle Längen auf eine geeignet gewählte Länge a der geometrischen Anordnung und die Geschwindigkeit auf eine geeignet gewählte Geschwindigkeit $\overline{u}$ (z. B. die ungestörte Geschwindigkeit des Flüssigkeitsstromes im Unendlichen) beziehen und schreiben

$$\psi = a\overline{u}\,\psi'(x', y'), \quad x' = \frac{x}{a}, \quad y' = \frac{y}{a}.$$

Damit geht (2) über in:

$$\left(\frac{a\overline{u}}{a^2}\right)^2 \left[\frac{\partial \psi'}{\partial y'}\frac{\partial \Delta \psi'}{\partial x'} - \frac{\partial \psi'}{\partial x'}\frac{\partial \Delta \psi'}{\partial y'}\right] = \frac{a\overline{u}}{a^4}\,\nu \Delta \Delta \psi'$$

oder mit $R = \frac{a\overline{u}}{\nu}$ (reduzierte Geschwindigkeit, Reynoldssche Zahl):

$$\frac{\partial \psi'}{\partial y'}\frac{\partial \Delta \psi'}{\partial x'} - \frac{\partial \psi'}{\partial x'}\frac{\partial \Delta \psi'}{\partial y'} = \frac{1}{R}\Delta \Delta \psi' \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (3).$$

Wir wollen die Lösung unter Beschränkung auf große Reynoldssche Zahlen ansetzen in der Form:

$$\psi = f(x', y') + R^{\varkappa} F(x', z), \quad z = y' R^{\lambda},$$

[1]) Die Ableitung ist etwas allgemeiner, als die in der vorangehenden Kármánschen Arbeit angegebene; aus diesem Grunde ist eine Wiederholung vielleicht nicht unangebracht.

wobei $\varkappa$ und λ vorläufig noch unbestimmte Exponenten sind. $f(x', y')$ soll die Potentiallösung vorstellen, die ja eine strenge Lösung von (2) ist, also

$$\Delta f(x', y') = 0.$$

Wir bilden:

$$\Delta F = \frac{\partial^2 F}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial x'^2} + R^{2\lambda} \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}.$$

Unter der Annahme, daß R sehr groß und λ positiv ist, kann $\frac{\partial^2 F}{\partial x'^2}$ vernachlässigt werden. Ebenso ist in

$$\Delta \Delta F = \frac{\partial^4 F}{\partial x'^4} + 2 R^{2\lambda} \frac{\partial^4 F}{\partial x'^2 \partial z^2} + R^{4\lambda} \frac{\partial^4 F}{\partial z^4}$$

von den drei Gliedern rechts aus den gleichen Gründen nur das letzte beizubehalten Setzen wir diese Ausdrücke in (3) ein, so wird

$$R^{\varkappa + 2\lambda} \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{\partial^3 F}{\partial z^2 \partial x'} - R^{\varkappa + 2\lambda} \frac{\partial f}{\partial x'} \frac{\partial^3 F}{\partial z^3} +$$
$$R^{2\varkappa + 3\lambda} \left[\frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial^3 F}{\partial x' \partial z^2} - \frac{\partial F}{\partial x'} \frac{\partial^3 F}{\partial z^3}\right] = R^{\varkappa + 4\lambda - 1} \frac{\partial^4 F}{\partial z^4} \quad . \quad (4).$$

Da die rechte und linke Seite dieser Gleichung mit wachsendem R gleichmäßig gegen Unendlich gehen soll, so lauten die Bedingungen für $\varkappa$ und λ:

$$\varkappa + 2\lambda = 2\varkappa + 3\lambda = 4\lambda + \varkappa - 1.$$

Hieraus bestimmt sich

$$\lambda = {}^1/_2 \qquad \varkappa = -{}^1/_2.$$

Entwickeln wir weiter $f(x'y')$ in eine Taylorreihe nach y:

$$f(x'y') = f_0 + f_1(x) y + \ldots,$$

so ist f_0 eine Konstante, da die Wand des Körpers Stromlinie sein muß, und die Differentialgleichung (4) geht über in

$$\left[f_1 \frac{\partial^3 F}{\partial x' \partial z^2} - \frac{\partial f_1}{\partial x'} z\right] + \left[\frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial^3 F}{\partial x' \partial z^2} - \frac{\partial F}{\partial x'} \frac{\partial^3 F}{\partial z^3}\right] = \frac{\partial^4 F}{\partial z^4}$$

oder

$$\left(f_1 + \frac{\partial F}{\partial z}\right) \frac{\partial^3 (F + f_1 z)}{\partial x' \partial z^2} - \left(\frac{\partial f_1}{\partial x'} z + \frac{\partial F}{\partial x'}\right) \frac{\partial^3 (F + f_1 z)}{\partial z^3} = \frac{\partial^4 (F + f_1 z)}{\partial z^4},$$

wie man durch Differentiieren leicht nachweist. Bezeichnen wir $F + f_1 z$ mit G:

$$\frac{\partial G}{\partial z} \frac{\partial^3 G}{\partial x' \partial z^3} - \frac{\partial G}{\partial x'} \frac{\partial^3 G}{\partial z^3} = \frac{\partial^4 G}{\partial z^4} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5),$$

so lautet mit Hilfe dieser Funktion G die Lösung:

$$\psi = f(x'y') + \frac{1}{\sqrt{R}} (G - f_1 z),$$

wobei die Grenzbedingungen für G sind:

1) für $z = 0$: $\quad G = 0$

2) » $z = 0$: $\quad \frac{\partial G}{\partial z} = 0$

3) » $z = \infty$: $\quad \frac{\partial G}{\partial x'} = f_1$.

In der Tat haben wir damit unter der Voraussetzung großer Reynoldsscher Zahlen eine zweite Näherung für die Bewegung der Flüssigkeit gewonnen, denn in der Nähe der Wand ist $\psi = \frac{G}{\sqrt{R}}$, da sich an der Wand $f(x'y')$ wie $f_1 y$ oder $\frac{f_1 z}{\sqrt{R}}$ verhält und damit ist die Haftbedingung erfüllt. Im Unendlichen verhält sich G wie $f_1 z$, also ist $G - f_1 z = 0$; es bleibt also nur $\psi = f(x'y')$, d. h. die Potentiallösung. Integrieren wir (5) nach z, so wird

$$\frac{\partial G}{\partial z} \frac{\partial^2 G}{\partial x' \partial z} - \frac{\partial G}{\partial x'} \frac{\partial^2 G}{\partial z^2} = \frac{\partial^3 G}{\partial z^3} + q(x'),$$

setzen wir wieder für z und x' die Werte x und y ein und bezeichnen wir

$$\frac{\partial G}{\partial y} = u, \qquad \frac{\partial G}{\partial x} = -v,$$

so erhalten wir
$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = \varphi(x) + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

Die Funktion $\varphi(x)$ bestimmt sich aus den Anfangsbedingungen: für $y = 0$ ist $v = 0$, also
$$\nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_{y=0} = -\varphi(x),$$
oder wenn p den Druckverlauf längs der Wand bedeutet, nach der Bewegungsgleichung der x-Richtung:
$$\nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_{y=0} = -\varphi(x) + \frac{1}{\varrho} \frac{dp}{dx}.$$

Ersetzen wir $\varphi(x)$ durch diesen Wert, so erhalten wir die von Prandtl 1904 aufgestellte Differentialgleichung der Grenzschicht
$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\varrho} \frac{dp}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad \ldots \ldots \ldots (6).$$
die sich von der ersten Gl. (1) durch Wegfall des Gliedes $\nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ unterscheidet. Man kann natürlich auch unmittelbar einsehen, das unter den gemachten Annahmen die Abteilung von u nach x gegenüber der nach y verschwindend klein sein muß; überdies wird das in (1) auftretende Druckgefälle $\frac{\partial p}{\partial x}$ jetzt als Funktion von x allein angesehen. Es läßt sich weiter zeigen, daß diese Gleichung sich nicht ändert, wenn wir an Stelle der ebenen Wand eine krumme und gleichzeitig an Stelle der bisher verwandten rechtwinkligen Koordinaten die Bogenlänge und den senkrechten Abstand vom Körper einführen, wofern die Krümmung nicht allzu stark ist[1]). Wir werden in Zukunft immer mit diesem Koordinatensystem rechnen. Den Anfangspunkt lassen wir dabei mit dem Staupunkt zusammenfallen.

Die Dicke der Grenzschicht δ ergibt sich aus dieser Betrachtung proportional zu solchen Werten von ψ, die auf ein z von der Größenordnuug 1 führen, also:
$$\delta \infty \frac{a}{\sqrt{R}}.$$

Wir bemerken noch, daß die Navier-Stokesschen Gleichungen hinsichtlich der Koordinaten vom elliptischen Typus sind, während die Prandtlsche Grenzschichten-Gleichung parabolisch ist. Vom physikalischen Gesichtspunkt besteht die Vernachlässigung darin, daß ein Teilchen der Grenzschicht für seine Bewegung nach der y Koordinate weder mit Masse behaftet ist, noch eine Verzögerung durch die Reibung erfährt. Es ist klar, daß so tief einschneidende Veränderungen der Differentialgleichung wesentliche Unterschiede der berechneten gegenüber den wirklich beobachteten Strömungsvorgängen mit sich bringen könnten, und es ist eine weitere Aufgabe, zu untersuchen, in wieweit die Lösung der Grenzschichten-Theorie mit der Wirklichkeit im Einklang steht.

Die wichtigste Erscheinung, die mit Hilfe der Grenzschichten-Theorie erklärt werden kann, ist die Ablösung der Strömung von der Wand, die z. B. beim Umströmen eines Körpers stattfindet. Da wir die Dicke der Grenzschicht als sehr klein gegenüber den Abmessungen des Körpers erhalten haben, so hat sich auch das Druckgefälle über dem Querschnitt der Grenzschicht genähert als konstant ergeben. Die Geschwindigkeitsverteilung in einem Profil der Grenzschicht sinkt dagegen vom Werte der Potentialströmung auf den Wert Null an der Wand. Findet nun längs des Körpers ein

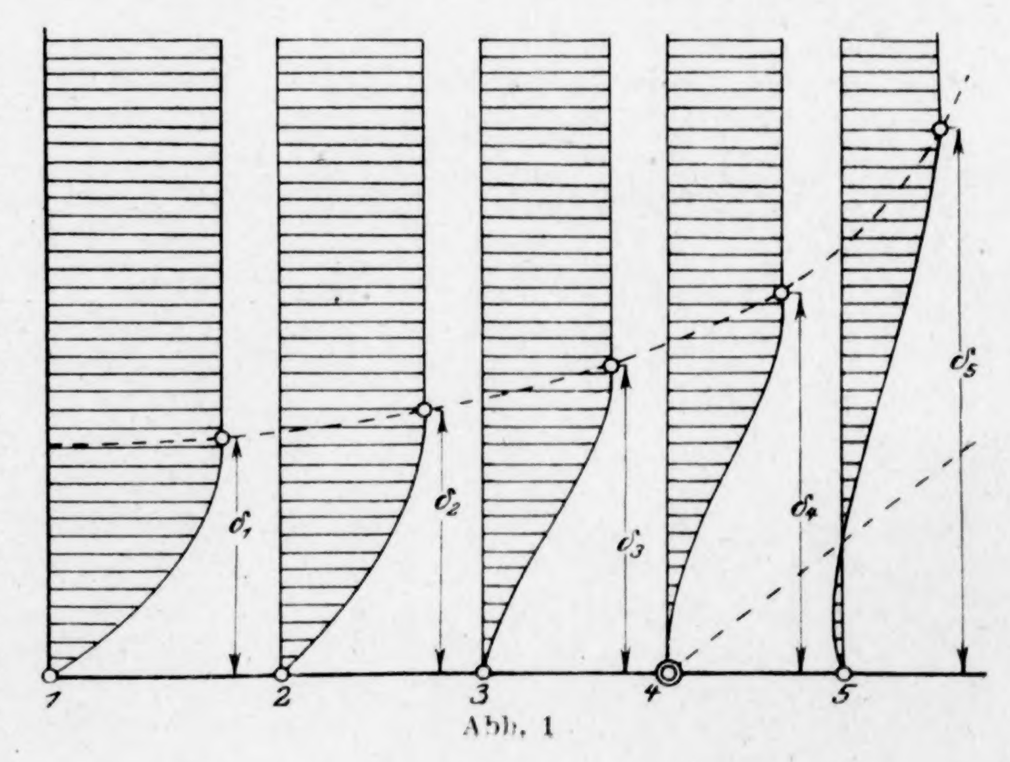


Abb. 1

1) Vergl. Hiemenz, Dissertation S. 3.

Druckanstieg statt, so werden die Teilchen der Grenzschicht an der Wand eher zur Ruhe kommen und in eine Rückströmung übergehen als diejenigen, die mehr nach der Potentialströmung zu liegen. Es werden also in der Umgebung des Ablösungspunktes Verhältnisse eintreten, die qualitativ durch Abb. 1 dargestellt werden. Für den Ablösungspunkt selbst muß sein

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \text{ für } y = 0.$$

Hieraus kann die Stelle des Ablösungspunktes berechnet werden. Die Grenzschicht trennt sich in diesem Punkte von der Wand und geht unter einem bestimmten kleinen Winkel in die Flüssigkeitsströmung hinaus.

Abb. 2

2. Ableitung der Kármánschen Integralbedingung. Für das ebene stationäre Problem lautet die Differentialgleichung der Grenzschicht:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{1}{\varrho} \frac{dp}{dx}.$$

Hierzu kommt noch die Kontinuitätsbedingung:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

Wir führen eine Zusatzfunktion $q(xy)$ derart ein, daß

$$u = U - q(xy),$$

s. Abb. 2, wobei $U = f_1$ die Geschwindigkeit außerhalb der Grenzschicht bedeutet, die durch die Potentialströmung gegeben ist und auf Grund der Eulerschen Gleichung mit dem durch das Experiment ermittelten Druckgefälle längs des Körpers wie folgt verknüpft ist. Es ist

$$-\frac{1}{\varrho} \frac{dp}{dx} = U \frac{dU}{dx} = UU'.$$

Gl. (6) geht bei Einführung dieser Zusatzfunktion über in

$$(U - q)\left(\frac{dU}{dx} - \frac{\partial q}{\partial x}\right) - v \frac{\partial q}{\partial y} = -\nu \frac{\partial^2 q}{\partial y^2} + U \frac{dU}{dx}$$

oder

$$-q \frac{dU}{dx} - U \frac{\partial q}{\partial x} + q \frac{\partial q}{\partial x} - v \frac{\partial q}{\partial y} = -\nu \frac{\partial^2 q}{\partial y^2}.$$

Wir integrieren nach y und erhalten:

$$-\frac{dU}{dx} \int_0^\infty q\,dy - U \frac{d}{dx} \int_0^\infty q\,dy + \frac{d}{dx} \int_0^\infty \frac{q^2}{2}\,dy - \int_0^\infty v \frac{\partial q}{\partial y}\,dy = -\nu \left[\frac{\partial q}{\partial y}\right]_0^\infty.$$

Als obere Grenze haben wir ∞ zu schreiben, wenn die Funktion q asymptotisch gegen U geht. Angenähert können wir annehmen, daß in einer Entfernung, die wir die Dicke der Grenzschicht nennen, q von Null nicht mehr merklich abweicht. Es genügt dann, die Integrale von 0 bis δ zu erstrecken.

Zufolge der Kontinuitätsgleichung können wir nach partieller Integration schreiben:

$$\int_0^\infty v \frac{\partial q}{\partial y}\,dy = [vq]_0^\infty - \int_0^\infty q \frac{\partial v}{\partial y}\,dy = [vq]_0^\infty + \frac{dU}{dx} \int_0^\infty q\,dy - \frac{d}{dx} \int_0^\infty \frac{q^2}{2}\,dy.$$

Da nun $[vq]_0^\infty$ sowohl an der oberen wie auch an der unteren Grenze verschwindet, so bleibt:

$$-2 \frac{dU}{dx} \int_0^\infty q\,dy - U \frac{d}{dx} \int_0^\infty q\,dy + \frac{d}{dx} \int_0^\infty q^2\,dy = -\nu \left[\frac{\partial q}{\partial y}\right]_0^\infty \quad . \quad . \quad . \quad (7).$$

Die Randbedingungen, die die Funktion $q(x, y)$ zu erfüllen hat, lauten:

1. für $y = 0$: $u = 0$, d. h. $q = U$,
2. » $y = \infty$: $u = U$, » » $q = 0$,
3. auch für die Wand des Körpers muß die Grenzschichtengleichung gelten. Für $y = 0$ ergibt sich aber, da sowohl u als auch $\frac{\partial u}{\partial y}$ hier den Wert Null haben:

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_{y=0} = \left(\frac{\partial^2 (U - q)}{\partial y^2}\right)_{y=0} = -\frac{1}{\nu} U \frac{dU}{dx}.$$

Jede Lösung der Grenzschichtengleichung muß offenbar diese Integralbedingung erfüllen. Wenn wir nun für die Abhängigkeit der Größe q von y einen einfachen, angenäherten Ansatz machen, z. B. eine Potenzreihe, so werden die Koeffizienten dieses Ansatzes Funktionen von x allein sein. Man erhält nun eine Annäherung zur Lösung, falls man die Anzahl dieser Koeffizienten so bestimmt, daß nach Erfüllung der Grenzbedingungen ein noch unbestimmt bleibender Koeffizient übrig bleibt. Alsdann liefert die Integralbedingung eine gewöhnliche Differentialgleichung zur Bestimmung dieses Koeffizienten und damit die Festlegung des Geschwindigkeits-Profiles in Abhängigkeit von x.

Während daher bei der ursprünglichen Differentialgleichung der Grenzschicht eine partielle Differentialgleichung zu lösen ist, haben wir durch die Integralbedingung nur eine gewöhnliche Differentialgleichung zu lösen. Es steht nichts im Wege, die Annäherung weiter zu treiben, indem man die Integralbedingung z. B. für mehrere Teilbereiche $\left(\text{etwa von } 0 \text{ bis } \frac{\delta}{2} \text{ und } \frac{\delta}{2} \text{ bis } \delta\right)$ einzeln erfüllt und so statt eines freibleibenden Koeffizienten deren zwei bestimmt. Auch liegt die Möglichkeit vor, weitere Integralbedingungen dadurch zu gewinnen, daß man beide Seiten von Gl. (7) etwa mit $y, y^2, \ldots y^n$ nacheinander multipliziert und dann von Null bis Unendlich integriert, etwa nach Analogie wie bei dem Stieltjesschen Verfahren eine Funktion durch ihre Momente festgelegt wird.

Die nachfolgenden Berechnungen zeigen jedoch, daß die Erfüllung der einfachen Integralbedingung, die — wie nachher gezeigt wird — den wahren physikalischen Inhalt der Grenzschichten-Theorie enthält, durchaus genügt, um die Geschwindigkeitsverteilung mit einer für praktische Zwecke genügenden Genauigkeit zu bestimmen. Insbesondere zeigt das Beispiel der Strömung um den Zylinder, daß unser Verfahren der bisherigen Rechnungsmethode nach dem Hiemenzschen Ansatz (Taylorentwicklung nach x und Auflösung einer Reihe von gewöhnlichen Differentialgleichungen zur Bestimmung der Koeffizienten der Reihe) weit überlegen ist, indem man nach Auflösung einer einzigen Differentialgleichung eine der exakten Lösung so nahe stehende Annäherung gewinnt, wie wenn man nach dem anderen Verfahren wenigstens vier bis fünf Differentialgleichungen aufgelöst hätte.

Wie die Integralbedingung auf Grund physikalischer Betrachtungen direkt abgeleitet werden kann, ist in der vorangehenden Kármánschen Arbeit gezeigt.[1])

3. Die Strömung an der ebenen Platte. Wir wollen zunächst das Näherungsverfahren zur Integration der Differentialgleichung der Grenzschicht auf den Fall einer ebenen Platte anwenden, die parallel den Stromlinien in einen gleichförmig fließenden Flüssigkeitsstrom eingetaucht ist. Die Geschwindigkeit U außerhalb der Grenzschicht ist hierbei eine Konstante und die Differentialgleichung (6) lautet:

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad \text{und} \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

Die Integralbedingung (7) vereinfacht sich zu

$$-U\frac{d}{dx}\int_0^\delta q\,dy + \frac{d}{dx}\int_0^\delta q^2 dy = -\nu\left[\frac{\partial q}{\partial y}\right]_0^\delta.$$

Als Grenzbedingungen sind vorgegeben:

für die Differentialgleichung: für $y = 0$: $u = 0$; für $y = \infty$: $u = U =$ konst.

» » Integralbedingung: für $y = 0$: $q = U$; für $y = \infty$: $q = 0$;

außerdem muß sein:

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_{y=0} = 0.$$

Das Beispiel der ebenen Platte läßt, wie Blasius in seiner Dissertation gezeigt hat, die Reduktion der partiellen Differentialgleichung mit Hilfe von Aehnlichkeitsbetrachtungen auf eine gewöhnliche Differentialgleichung dritter Ordnung zu. Blasius integriert die Kontinuitätsgleichung mit Hilfe der Stromfunktion ψ, wobei

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

[1]) Dieses Heft, S. 233 bis 252.

und führt zwei neue Variable ξ und ζ derart ein, daß

$$\xi = {}^1/_2 \sqrt{\frac{\varrho U}{\mu x}}\, y, \quad \zeta = \psi \sqrt{\frac{\varrho}{\mu U x}}.$$

Dann wird:

$$u = {}^1/_2\, U \zeta', \quad v = {}^1/_2 \sqrt{\frac{\mu U}{\varrho x}} (\xi \zeta' - \zeta),$$

wobei der Strich die Differentiation nach ξ bezeichnet. Setzen wir diese Werte in die Grenzschichtengleichung ein, so erhalten wir

$$\zeta \zeta'' = - \zeta'''.$$

Die numerische Integration dieser Gleichung mit Hilfe des Kutta-Verfahrens ist von C. Toepfer ausgeführt worden [1]).

Für den Widerstand pro Flächeneinheit der Platte erhält Blasius

$$X_y = \mu \frac{\partial u}{\partial y} = 0{,}332 \sqrt{\frac{\mu \varrho U^3}{x}}.$$

Gehen wir nunmehr dazu über, auch mit Hilfe des Näherungsverfahrens der Integralbedingung die Lösung für die ebene Platte zu gewinnen. Wir setzen q als Potenzreihe nach y an

$$u = U - q = a(x) y + b(x) y^2 + c(x) y^3 + \ldots$$

1. Zunächst brechen wir mit dem ersten Gliede ab, also

$$q = U - a(x) y.$$

Als obere Grenze der Integrale führen wir δ ein. Wir ersetzen also das Grenzschichten-Profil durch einen gebrochenen Linienzug. Die Grenzbedingung ist: für $y = \delta$ soll $u = U$, also $U = a\delta$ sein.

Wir haben zu bilden:

$$\int_0^\delta q\, d y = U \left[y - \frac{y^2}{2\delta} \right]_0^\delta = \frac{U \delta}{2}, \qquad \int_0^\delta q^2\, d y = U^2 \left[y - \frac{2 y^2}{2 \delta} + \frac{y^3}{3 \delta^2} \right]_0^\delta = \frac{U^2 \delta}{3}$$

$$\frac{d}{d x} \int_0^\delta q\, d y = \frac{U \delta'}{2}, \qquad \frac{d}{d x} \int_0^\delta q^2\, d y = \frac{U^2 \delta'}{3}, \qquad \frac{\partial q}{\partial y} = - \frac{U}{\delta}.$$

Also lautet die Integralbedingung:

$$- \frac{U^2 \delta'}{2} + \frac{U^2 \delta'}{3} = - \nu \frac{U}{\delta} \quad \text{oder} \quad \delta \delta' = \frac{6 \nu}{U}$$

und mithin:

$$\delta = \sqrt{\frac{12\, \nu x}{U}}.$$

Für den Widerstand ergibt sich:

$$X_y = 0{,}289 \sqrt{\frac{\mu \varrho U^3}{x}}.$$

2. Eine andere schon etwas bessere Näherung gewinnen wir dadurch, daß wir den Geschwindigkeitsabfall durch eine Parabel annähern und für $y = \delta$ fordern, daß $\frac{\partial q}{\partial y}$ stetig bleibt. Allerdings müssen wir dann auf die Bedingung an der Wand $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ verzichten. Es ist $q = U - u = U - a y - b y^2$, wobei sich a zu $\frac{2 U}{\delta}$ und b zu $- \frac{U}{\delta^2}$ bestimmt. Wir bilden wiederum die erforderliche Integrale

$$\int_0^\delta q\, d y = \frac{U \delta}{3}, \quad \int_0^\delta q^2 d y = \frac{U^2 \delta}{5}$$

[1]) In einer von C. Runge gestellten Göttinger Staatsexamensarbeit, vergl. Zeitschrift für Math. und Phys. 1912. S 397. Der Verlauf der Funktion ζ und ihrer Ableitung ist auch wiedergegeben in dem Aufsatz von E. Pohlhausen in dieser Zeitschrift, Bd. 1, 1921, S. 119, Abb 1.

und hieraus

$$\frac{d}{dx}\int_0^\delta q\,d\,y = \frac{U\delta'}{3}, \quad \frac{d}{dx}\int_0^\delta q^2 dy = \frac{U^2\delta'}{5};$$

weiter ist

$$\left[\frac{\partial q}{\partial y}\right]_0^\delta = \frac{2\,U}{\delta}.$$

Mit Hilfe der Integralbedingung ergibt sich:

$$U^2\,\delta'\,[{}^1\!/_3 - {}^1\!/_5] = \frac{2\,U\nu}{\delta}, \quad \delta = \sqrt{\frac{30\,\nu\,x}{U}} = 5{,}477\sqrt{\frac{\nu\,x}{U}}$$

und für den Widerstand

$$X_y = 0{,}365\sqrt{\frac{\mu\,\varrho\,U^3}{x}}.$$

Während Annäherung 1 einen um 13 vH zu kleinen Betrag ergibt, liefert die Annäherung 2 einen um 6,5 vH zu großen Wert.

3. Um beiden Bedingungen (kein Knick in der Geschwindigkeitsverteilung und Randbedingung für $\frac{\partial^2 q}{\partial y^2}$ an der Wand) zu genügen, müssen wir wenigstens **drei Glieder** in u beibehalten. Wir setzen:

$$u = a\,y + b\,y^2 + c\,y^3.$$

Die Funktionen $a\,b\,c$ bestimmen sich aus den Grenzbedingungen:

1. $u = U$ für $y = \delta$ liefert $U = a\,\delta + b\,\delta^2 + c\,\delta^3$
2. $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$ für $y = 0$ » $0 = a + 2\,b\,\delta + 3\,c\,\delta^2$,
3. $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_{y=0} = -\frac{U\,U'}{\nu} = 0$ liefert, da $U' = 0$, $b = 0$.

Als Gleichungen für die noch unbekannten Funktionen a und c erhalten wir:

$$U = a\,\delta + c\,\delta^3, \quad 0 = a + 3\,c\,\delta^2.$$

Hieraus folgt

$$a = {}^3\!/_2\,\frac{U}{\delta}, \quad c = -\frac{U}{2\,\delta^3}, \quad q = U\left[1 - {}^3\!/_2\,\frac{y}{\delta} + \frac{y^3}{2\,\delta^3}\right].$$

Die Integrale berechnen sich zu:

$$\int_0^\delta q\,d\,y = {}^3\!/_8\,U\,\delta, \quad \int_0^\delta q^2\,d\,y = \frac{33}{140}\,U^2\,\delta$$

und

$$\left[\frac{\partial q}{\partial y}\right]_0^\delta = {}^3\!/_2\,\frac{U}{\delta}.$$

Für δ ergibt sich die Differentialgleichung

$$U\,\delta'\left[\frac{3}{8} - \frac{33}{140}\right] = \frac{3}{2}\,\frac{\nu}{\delta}$$

und daraus:

$$\delta = \sqrt{\frac{280}{13}\,\frac{\nu\,x}{u}} = 4{,}64\sqrt{\frac{\nu\,x}{U}}.$$

Der Widerstandskoeffizient für diese Näherung ist 0,323, d. h. ein Wert, der etwa um 3 vH zu klein ist.

4. Da nach der exakten Grenzschichten-Theorie die Funktion q wie $e^{-\lambda y^2}$ zu 0 geht, so kann man annehmen, daß man eine noch bessere Annäherung gewinnt, wenn man für $y = \delta$ eine noch engere Berührung zu $u = U$ vorschreibt. Wir nehmen daher als vierte und letzte Annäherung **vier unbekannte Funktionen** a, b, c, d an, so daß

$$u = a\,y + b\,y^2 + c\,y^3 + d\,y^4$$

und setzen als Nebenbedingungen

$$1.\ \text{für}\ y = 0:\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{U U'}{\nu} = 0$$
$$2.\ \text{»}\ \ y = \delta:\ u = U$$
$$3.\ \text{»}\ \ y = \delta:\ \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$
$$4.\ \text{»}\ \ y = \delta:\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Damit erhalten wir als Gleichungen zur Bestimmung der Funktionen

$$a + 2 b \delta + 3 c \delta^2 + 4 d \delta^3 = 0, \quad a \delta + b \delta^2 + c \delta^3 + d \delta^4 = U$$
$$b = 0, \quad 2 b + 6 c \delta + 12 d \delta^2 = 0.$$

Durch Auflösen ergibt sich:

$$a = \frac{2 U}{\delta},\ b = 0,\ c = -\frac{2 U}{\delta^3},\ d = \frac{U}{\delta^4},$$

so daß

$$q = U - u = U\left[2 \frac{y}{\delta} - 2 \frac{y^3}{\delta^3} + \frac{y^4}{\delta^4}\right]$$

und

$$\int_0^\delta q\, dy = {}^3/_{10}\, U \delta, \quad \int_0^\delta q^2 dy = \frac{23}{126} U^2 \delta, \quad \left[\frac{\partial q}{\partial y}\right]_0^\delta = -\frac{2 U}{\delta}$$

Die Integralbedingung liefert:

$$\delta' = \frac{630}{37} \frac{\nu}{U \delta}$$

und daraus

$$\delta = 2 \sqrt{\frac{315}{37} \frac{\nu x}{U}} = 5{,}83 \sqrt{\frac{\nu x}{U}}.$$

Der Widerstandskoeffizient berechnet sich hiermit zu 0,343. Der Wert ist etwa um 3 vH zu groß, so daß die Annäherung ungefähr dieselbe Genauigkeit wie die vorhergehende hat. Wir haben bei den weiteren Berechnungen diesen Ansatz beibehalten, da die enge Berührung für $y = \delta$ uns mehr Gewähr dafür bietet, daß die Geschwindigkeitsverteilung auch in komplizierten Fällen die physikalisch anschauliche Gestalt beibehält, so daß z. B. ein Anwachsen über U vermieden wird.

In Abb 3 sind die Werte der Widerstandskoeffizienten, die sich bei den einzelnen Näherungen ergeben haben, aufgetragen. Um auch ein Bild über den Verlauf eines Profils der Grenzschicht zu gewinnen, sind in folgender Zahlentafel die entsprechenden Profile für $U = 1$, $x = 1$ und $\nu = 1$ zusammengestellt. Vergl. auch Abb. 4.

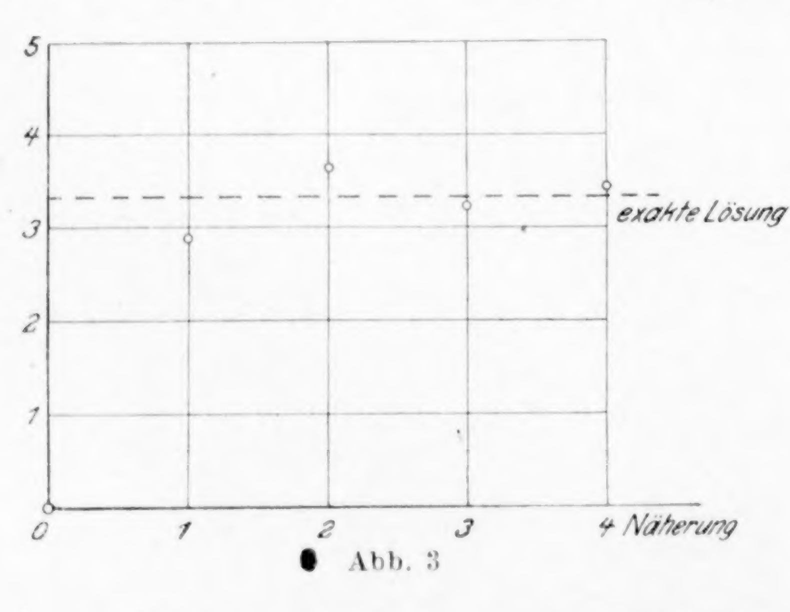


Abb. 3

y	Näherung I	Näherung II	Näherung III	Näherung IV.	exakte Lösung
0	0	0	0	0	0
1	0,289	0,332	0,318	0,334	0,329
2	0,578	0,597	0,604	0,619	0,629
3	0,867	0,796	0,834	0,828	0,846
4	1,000	0,927	0,972	0,948	0,955
5	1,000	0,991	0,990	0,995	0,990

Endlich sei auch die »Verdrängungsdicke δ^*«, d. h. diejenige Größe angegeben, um welche die Stromlinien der Potentialströmung nach außen verschoben werden. Es ist

$$U \delta^* = \int_0^\delta q\, dy.$$

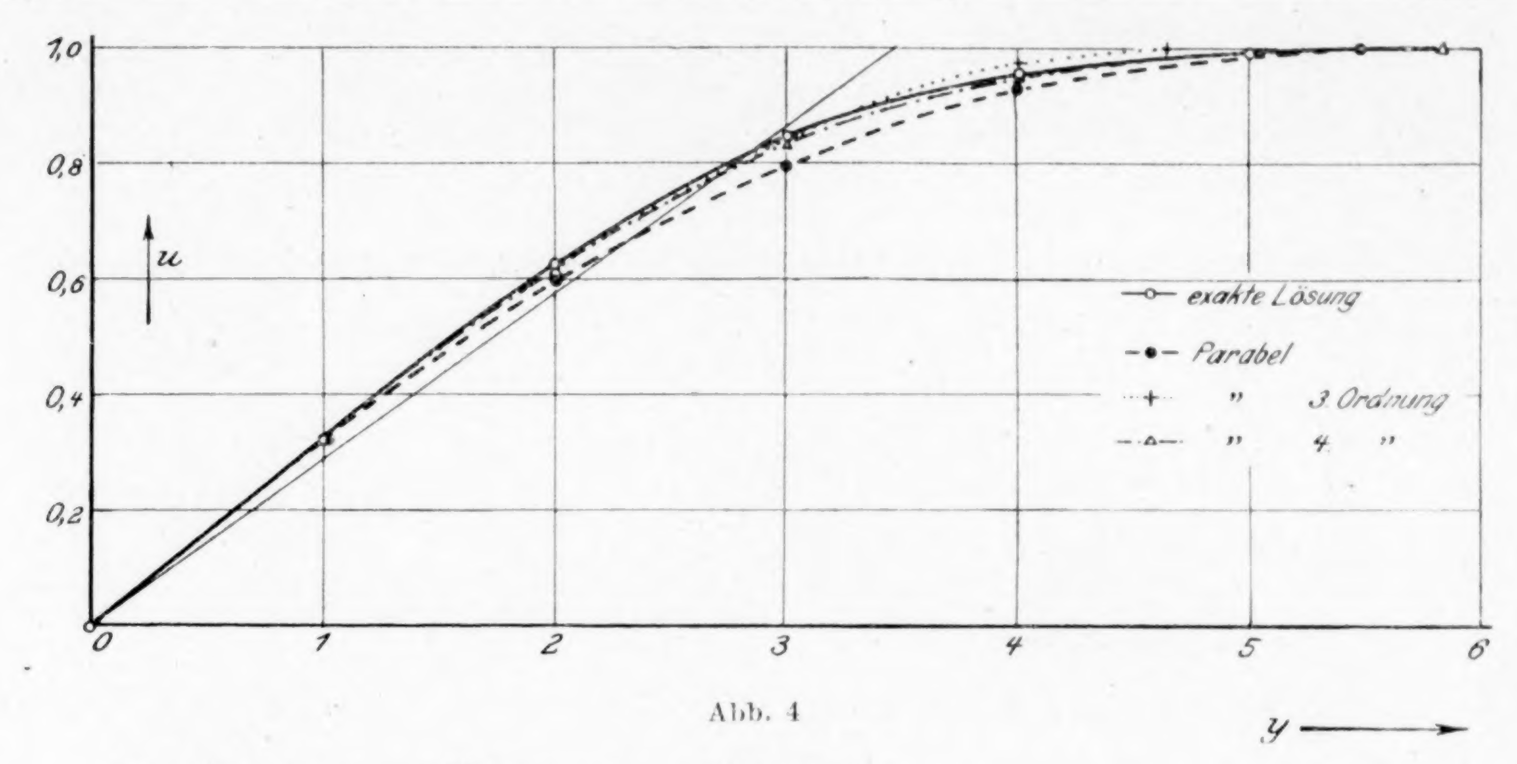


Abb. 4

Für die einzelnen Näherungen ergibt sich:

Näherung	I	II	III	IV	exakte Lösung
$\delta^* =$	$1{,}73\sqrt{\frac{\nu x}{U}}$	$1{,}83\sqrt{\frac{\nu x}{U}}$	$1{,}74\sqrt{\frac{\nu x}{U}}$	$1{,}75\sqrt{\frac{\nu x}{U}}$	$1{,}73\sqrt{\frac{\nu x}{U}}$

4. Die Strömung um Körper bei vorgegebener Druckverteilung. Der ursprüngliche Gedanke der Prandtlschen Grenzschichten-Theorie bestand darin, daß Gl. (6) zusammen mit der Kontinuitätsgleichung — in Verbindung mit der Theorie der Potentialbewegung idealer Flüssigkeiten — ausreicht, um die Geschwindigkeitsverteilung in der Grenzschicht zu bestimmen. Dabei sollte die dritte der in den beiden Gleichungen auftretenden abhängig Veränderlichen, p, in der Weise eliminiert werden, daß man für das Druckgefälle $\frac{dp}{dx}$ den Wert setzte, der sich dafür aus der Potentiallösung längs der Randlinie ergab; außerdem sollte der in die Randbedingung eingehende Wert von U ebenfalls der Potentiallösung entnommen werden. In diesem Sinne wurde unser Beispiel in 3 mit $\frac{dp}{dx} = o$, U=konst. behandelt. Nun haben aber die vorerwähnten Untersuchungen von Blasius, Boltze und Hiemenz gezeigt, daß derart nicht genügende Uebereinstimmung mit der Beobachtung erzielt werden kann. Daher hat Hiemenz auf Anregung Prandtls einen anderen Weg eingeschlagen: er bestimmt durch Versuche den Druckverlauf längs der Begrenzung und führt diesen und den daraus berechneten Verlauf von U in die Differentialgleichung bezw. die Randbedingung ein. Wir wollen auch dazu übergehen, den Fall eines durch das Experiment vorgegebenen Druckverlaufes zu behandeln. In diesem allgemeinen Fall müssen wir damit rechnen, daß Ablösung stattfindet, wie es in Abb. 1 dargestellt ist. Es hätte also keinen Zweck, die Funktion u, die die Geschwindigkeitsverteilung in der Grenzschicht darstellen soll, durch eine ganze rationale Funktion erster oder zweiter Ordnung in y anzunähern, da erst eine Parabel dritter Ordnung einen Wendepunkt aufweist. Um aber gleich eine bessere Annäherung zu erhalten, wollen wir auch das Glied y^4 noch mitnehmen und schreiben:

$$u = ay + by^2 + cy^3 + dy^4,$$

wobei wie früher $u = U - q$ sein soll. Die Dicke der Grenzschicht sei wiederum δ. Als Grenzbedingungen sind vorgegeben:

1) für $y = \delta$: $\quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0,$

2) » $y = \delta$: $\quad u = U$

3) » $y = 0$: $\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -U\frac{U'}{\nu},$

Als 4. Bedingung wählen wir wiederum wie bei der Platte willkürlich

4) für $y = \delta$: $\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$

Mit Hilfe dieser Bedingungen sind nunmehr die vier unbekannten Funktionen a, b, c, d zu bestimmen. Aus 3) folgt sofort, daß die Funktion b allein durch den vorgegebenen Druckverlauf bestimmt wird:

$$b = -\frac{U U'}{2\nu}.$$

Die übrigen Bedingungen liefern die folgenden Bestimmungsgleichungen für a, c und d:

$$a + 2b\delta + 3c\delta^2 + 4d\delta^3 = 0, \quad a\delta + b\delta^2 + c\delta^3 + d\delta^4 = U, \quad 2b + 6c\delta + 12d\delta^2 = 0.$$

Hieraus berechnet sich:

$$a = \frac{U}{6\,\delta}(12 + \lambda), \quad b = -\frac{U U'}{2\,\nu} = -\frac{U\lambda}{2\,\delta^2},$$

$$c = -\frac{U}{2\,\delta^3}(4 - \lambda), \quad d = \frac{U}{6\,\delta^4}(6 - \lambda),$$

wobei mit λ die dimensionslose Zahl $\lambda = \frac{U'\delta^2}{\nu}$ bezeichnet worden ist.

Zwecks Aufstellung der Integralbedingung berechnen wir nunmehr

$$\int_0^\delta q\,dy = \frac{U\delta}{120}(36 - \lambda),$$

$$\int_0^\delta q^2 dy = \frac{U^2\delta}{252}\left(46 - \frac{11}{6}\lambda + \frac{\lambda^2}{36}\right)$$

und bilden:

$$\frac{d}{dx}\int_0^\delta q\,dy = \frac{U\delta'}{40}\left[12 - \frac{U'\delta^2}{\nu}\right] + \frac{3}{10}U'\delta - \frac{\delta^3}{120\,\nu}\left[U'^2 + U U''\right]$$

$$\frac{d}{dx}\int_0^\delta q^2 dy = \frac{U^2\delta'}{126}\left[23 - \frac{11}{4}\frac{U'\delta^2}{\nu} + \frac{5}{72}\frac{U'^2\delta^4}{\nu^2}\right] + \frac{23}{63}U U'\delta$$
$$- \frac{11}{1512}\frac{U\delta^3}{\nu}\left(2\,U'^2 + U U''\right) + \frac{U U'\delta^5}{4536\,\nu^2}\left[U'^2 + U U''\right].$$

Setzen wir diese Ausdrücke in die Integralbedingung (7) ein, so ergibt sich nach einiger Zwischenrechnung die Differentialgleichung:

$$U\frac{\delta\,d\delta}{dx} = \frac{-2\,\nu + \frac{116}{315}U'\delta^2 - \frac{\delta^4}{7560\,\nu}\left[79\,U'^2 + 8\,U U''\right] - \frac{U'\delta^6}{4536\,\nu^2}\left[U'^2 + U U''\right]}{\left[-\frac{37}{315} + \frac{U'\delta^2}{315\,\nu} + \frac{5}{9072}\frac{U'^2\delta^4}{\nu^2}\right]}$$

oder, wenn wir wieder λ einführen und $\frac{\delta^2}{\nu}$ mit z bezeichnen

$$\frac{dz}{dx} = \frac{0{,}8\left[-9072 + 1670{,}4\,\lambda - \left(47{,}4 + 4{,}8\frac{U U''}{U'^2}\right)\lambda^2 - \left(1 + \frac{U U''}{U'^2}\right)\lambda^3\right]}{U\left[-213{,}12 + 5{,}76\,\lambda + \lambda^2\right]} \quad . \quad . \quad (8).$$

Die Lösung dieser nichtlinearen, gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung gibt uns für eine vorgegebene Funktion U die Aenderung der Dicke der Grenzschicht abhängig von der Bogenlänge des Körpers.

Wir bemerken zunächst, daß im Staupunkt des Körpers die Grenzschicht eine bestimmte endliche Dicke hat, denn für $x = 0$ und $\delta = \delta_0$ hat die Differentialgleichung einen singulären Punkt, wobei δ_0 eine reelle positive Wurzel der kubischen Gleichung

$$-9072 + 1670{,}4\,\lambda - \left(47{,}4 + 4{,}8\frac{U U''}{U'^2}\right)\lambda^2 - \left(1 + \frac{U U''}{U'^2}\right)\lambda^3 = 0$$

ist. Von den Integralkurven der Differentialgleichung haben wir als für die Dicke der Grenzschicht maßgebend, diejenige auszuwählen, die durch diesen singulären Punkt hindurch geht. An der Stelle der Ablösung der Grenzschicht muß die Tangente des Grenzschichtenprofiles senkrecht zur Wand stehen. Es muß also

$$a = \frac{U}{6\,\delta}(12 + \lambda) = 0, \quad \lambda = -12$$

sein.

Wir wollen nunmehr die oben abgeleitete, ganz allgemein gültige Differentialgleichung auf das Beispiel der Strömung um einen in den gleichförmigen Flüssigkeitsstrom eingetauchten Kreiszylinder anwenden und insbesondere die Ablösungsstelle an diesem bestimmen. Für dieses Beispiel ist von Hiemenz die Druckverteilung experimentell bestimmt worden. Bei seinen Versuchen in Wasser mit einem Zylinder von 97,5 mm Durchmesser bei einer Strömungsgeschwindigkeit der ungestörten Flüssigkeit von 19 cm/sec ergab sich aus der Druckverteilung

$$U = 7{,}151\, x - 0{,}04497\, x^3 - 0{,}000330\, x^5,$$

wobei die Bogenlänge x in cm gemessen wird. Wir bilden U' und U'', vergl. Abb. 5, und nehmen die Dichte des Wassers mit 1, seine Zähigkeit mit 0,01 an.

Abb. 5

Zunächst berechnen wir die Dicke der Grenzschicht im Staupunkt als Wurzel der kubischen Gleichung zu

$$\lambda_0 = \frac{U'\delta_0^2}{\nu} = 7{,}052, \quad \delta_0 = 0{,}09931 \text{ cm}.$$

Die Lösung der Differentialgleichung kann entweder graphisch erfolgen oder dadurch, daß wir für die im singulären Punkt $x = 0 \quad \frac{\delta^2}{\nu} = \frac{\delta_0^2}{\nu}$ horizontal verlaufende Lösungskurve eine Reihenentwicklung ansetzen und dann mit Hilfe eines Rechnungsverfahrens diese Kurve weiter verfolgen. Wir lösen die Differentialgleichung graphisch mit Hilfe des Isoklinen-Verfahrens, setzen zu diesem Zwecke

$$\frac{dz}{dx} = \varkappa = \frac{P(x,z)}{Q(x,z)}$$

und rechnen für die Werte $z = \frac{\delta^2}{\nu} = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$ die Werte von $\varkappa$ als Funktion von x aus. Offenbar werden diese Werte für diejenigen Abszissen unendlich, für die der Nenner $Q(x,z)$ verschwindet. Dies ist der Fall für $\lambda_1 = 12$ und $\lambda_2 = -17{,}76$. Mit Hilfe dieser Kurven $z = \text{const}$ konstruieren wir nun das Richtungsfeld der Differentialgleichung. Wir zeichnen in einem Koordinatensystem $x, \frac{\delta^2}{\nu}$ die Kurven $\varkappa = \text{konst.}$ und erhalten auf diese Weise Abb. 6. Eine nähere Diskussion der Differentialgleichung zeigt weiter, daß der singuläre Punkt $x = 0, \frac{\delta^2}{\nu} = \frac{\delta_0^2}{\nu}$ ein Sattelpunkt ist[1]). Durch diesen Punkt gehen also nur zwei Lösungskurven, von denen die mit horizontaler Tangente die gesuchte ist. Nehmen wir in der Zeichenebene einen beliebigen Punkt an und versuchen wir von ihm aus die Lösungskurve durch die Isoklinenschar hindurchzulegen, so wenden sich die Kurven wegen der oben angegebenen Singularität entweder nach plus oder minus Unendlich. Wir erhalten auf diese Weise ein scharfes Kriterium für die gesuchte, durch den singulären Punkt gehende Lösungskurve. Die Bogenlänge des Ablösungspunktes finden wir als Abszisse des Schnittpunktes der Integralkurve mit der Kurve $\lambda = -12$. Es ergibt sich:

$$x_0 = 6{,}94 \text{ cm}.$$

[1]) Vergl. etwa: Horn, Gewöhnliche Differentialgleichungen beliebiger Ordnung, Leipzig 1905 S. 333.

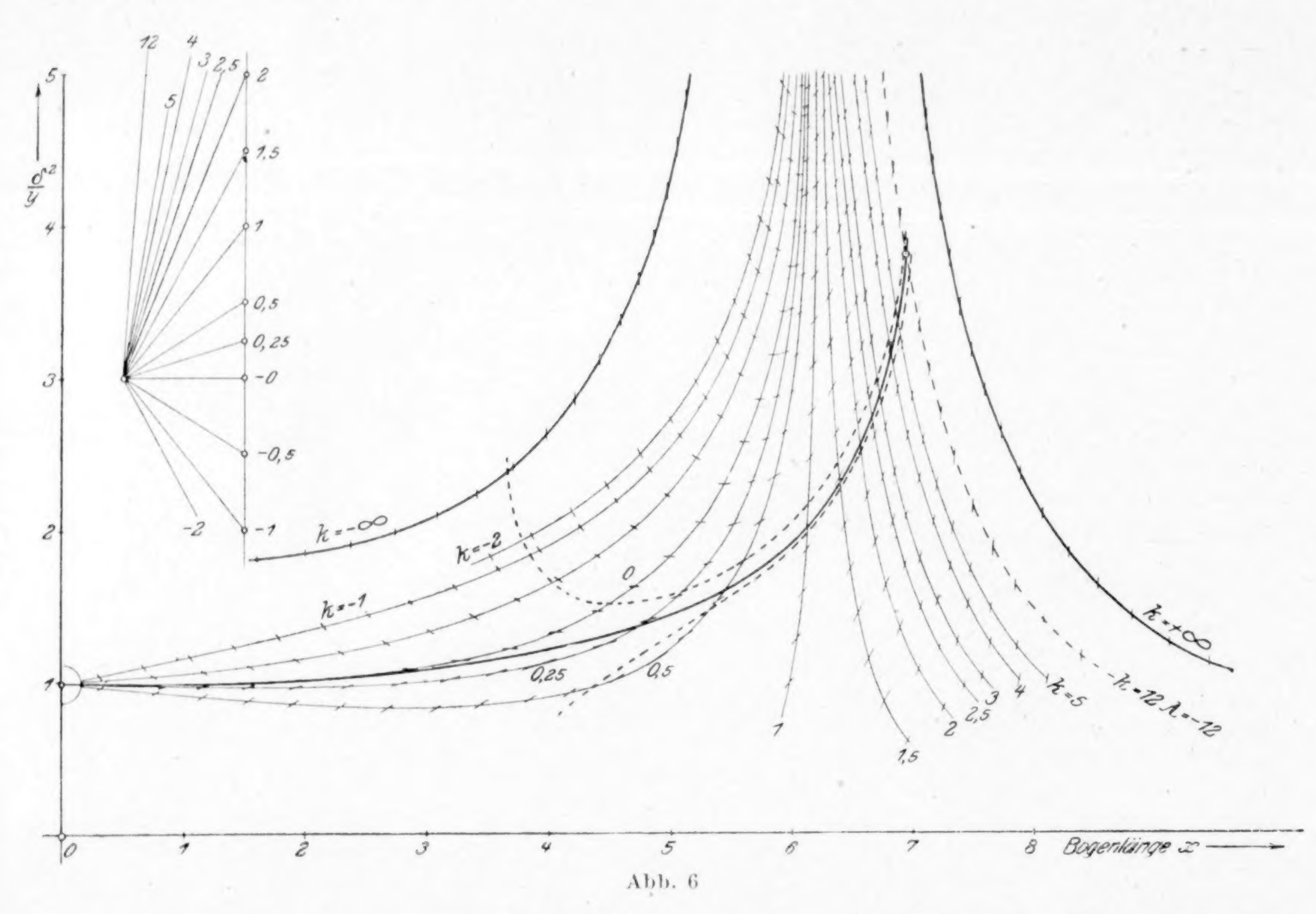


Abb. 6

Hiemenz hat in seiner Dissertation auf ganz anderem Wege den Versuch gemacht, für das Beispiel des Zylinders die Differentialgleichung der Grenzschicht zu lösen. Mit Hilfe der Stromfunktion ψ kann man schreiben:

$$\varrho\left[\frac{\partial\psi}{\partial y}\,\frac{\partial^2\psi}{\partial x\,\partial y}-\frac{\partial\psi}{\partial x}\,\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\right]=-\frac{d p}{d x}+\mu\,\frac{\partial^3\psi}{\partial y^3}.$$

Das Druckgefälle $\frac{dp}{dx}$ entwickelt er in in eine Potenzreihe nach x und macht auch für die Stromfunktion den Ansatz:

$$\psi=\psi_1 x+\psi_3 x^3+\psi_5 x^5,$$

stellt also die Lösung in Gestalt einer vom Standpunkt beginnende Taylorentwicklung dar. Dann läßt sich die partielle Differentialgleichung in eine Reihe unendlich vieler gewöhnlicher Differentialgleichungen zerlegen. Von diesem System löst er die ersten drei und behauptet, ohne den Grad der Konvergenz zu prüfen, daß hierdurch ψ hinreichend genau bestimmt sei und ψ_7, ψ_9 usw. keinen wesentlichen Einfluß mehr ausüben. Für den Ablösungspunkt erhält er 6,977, einen Wert, der mit dem oben abgeleiteten Näherungswert und mit dem Experiment sehr gut übereinstimmt.

Die Näherungsmethode hat den großen Vorteil, uns infolge der graphischen Behandlung einen wesentlich besseren Einblick in den Verlauf der Grenzschicht zu geben. Wir erkennen aus der unten näher erläuterten Abb. 8 sofort, daß es nicht möglich ist, vom Staupunkt aus mit drei Gliedern einer Taylorreihe den Verlauf der Lösungskurve bis zur Ablösung zu erfassen, da sie sehr bald hinter dieser Stelle senkrecht zur x-Achse verläuft. Auch der eine geometrische Ort des Ablösungspunktes — die Kurve $\lambda = -12$ — verläuft sehr steil zur Abszisse, so daß bedeutende Aenderung im Verlauf der Integralkurve relativ geringe Verschiebungen der Ablösung mit sich bringt. Der Ablösungspunkt verliert so vollständig die Bedeutung, die ihm Hiemenz als Prüfstein der Grenzschichten-Theorie zugeschrieben hat.

Der Unterschied unserer Näherungslösung und der von Hiemenz wird aber sehr beträchtlich, wenn man die Profile der Grenzschicht für einige Werte von x berechnet. Bei Hiemenz ändert sich die Dicke der Grenzschicht nur sehr wenig; sie beträgt etwas

über 1 mm. Die Grenzschicht der Näherung stimmt im Staupunkt mit der von Hiemenz überein. Im Ablösungspunkt dagegen ist $\frac{\delta^2}{\nu} = 3{,}84$; die Dicke $\delta = 1{,}96$ mm also doppelt so groß.

In Abb. 7 ist die Verdrängung δ^* sowohl nach der Hiemenzschen als auch nach der oben durchgeführten Lösung aufgetragen. Es ist dabei:

$$\delta^* = \int_0^\delta \frac{q}{U}\,dy = \delta \int_0^1 \frac{q}{U}\,d\left(\frac{y}{\delta}\right).$$

Abb. 7

Führen wir für q den Wert $U(1 - ay - by^2 - cy^3 - dy^4)$ ein, so ergibt sich nach Auswertung des Integrals mit Hilfe der dimensionslosen Größe $\lambda = \frac{U'\delta^2}{\nu}$

$$\delta^* = \sqrt{\frac{\nu\lambda}{U'}}\left(\frac{3}{10} - \frac{\lambda}{120}\right).$$

Folgende Tabelle gibt die berechneten Werte abhängig von der Bogenlänge des Zylinders.

x/cm	0	1	2	3	4	5	5,5	6	6,5	6,75	6,94
$\frac{\delta^2}{\nu}$	0,986	0,990	1,02	1,08	1,21	1,44	1,62	1,92	2,48	2,94	3,84
δ mm	0,993	0,995	1,01	1,04	1,10	1,20	1,27	1,39	1,57	1,71	1,96
δ^* mm	0,239	0,241	0,246	0,258	0 279	0,320	0,354	0,414	0,520	0,614	0,784

Wir vermuten, daß unsere Lösung eine bessere Annäherung an den wahren Verlauf bietet. Um den Unterschied klar hervor treten zu lassen, ist in Abb. 8 der Verlauf der Geschwindigkeit in der Grenzschicht für $y = 0{,}374$ mm (bei Hiemenz $H = 1$) abhängig von der Bogenlänge berechnet worden. Außerdem sind die einzelnen Glieder der Hiemenzschen Reihenentwicklung eingezeichnet worden. Es ergibt sich, daß die Hiemenzsche Lösung wohl gegen unsere Näherungslösung hin konvergiert, daß aber die Anzahl der berechneten Glieder ψ_n durchaus ungenügend ist und zum mindesten noch ψ_7 und ψ_9 berechnet werden müßten. Es scheint daher, daß eine Reihenentwicklung vom Staupunkte aus in diesem Falle verfehlt ist, weil die Aenderung des Geschwindigkeitsprofiles erst bei großen Werten von x merklich einsetzt, bei denen die Taylorentwicklung (wenn überhaupt) langsam konvergiert.

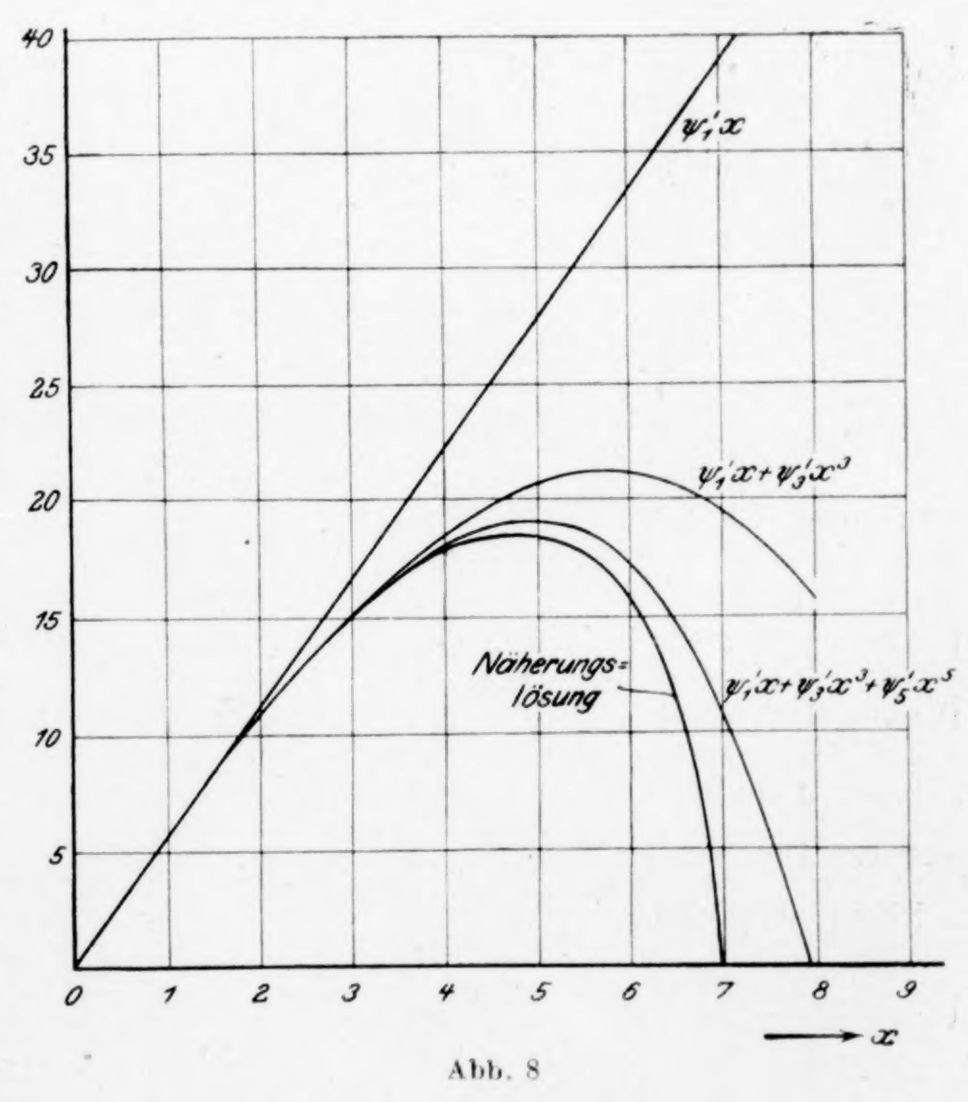


Abb. 8

5) Die Strömung zwischen nichtparallelen Wänden (Diffusor). Eine weitere Anwendung der näherungsweisen Integration der Differentialgleichung der Grenzschicht soll sich auf die Strömung im Diffusor beziehen.

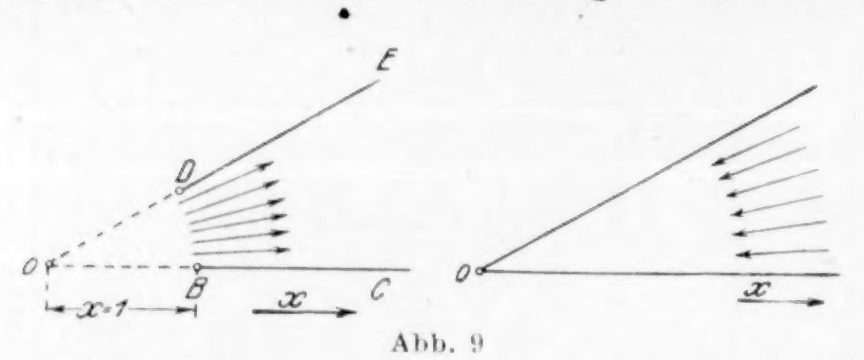


Abb. 9

Wir behandeln den einfachsten Fall zweier nicht paralleler geradliniger Wände BC und DE, Abb. 9. Wir verlängern die geraden Stücke bis zum Schnitt in O und wollen die Entfernung OB als Einheit festlegen. OC sei die x-Koordinatenrichtung unseres Systems. Im Punkte O nehmen wir nun eine Quelle an, deren Ergiebigkeit $2\pi A$ sei. Dann ist offenbar die radiale Geschwindigkeitsverteilung:

$$U = \frac{A}{x}.$$

Diesen Wert haben wir nun in die auf S. 262 abgeleitete allgemein gültige Differentialgleichung (8) einzusetzen. Für $\frac{UU''}{U'^2}$ erhalten wir den Wert 2, die Differentialgleichung geht also über in

$$\frac{dz}{dx} = \frac{0{,}8\,[-9072 + 1670{,}4\,\lambda - 57\,\lambda^2 - 3\,\lambda^3]}{\frac{A}{x}\,(-213{,}12 + 5{,}76\,\lambda + \lambda^2)},$$

wobei $\lambda = U'z = -\frac{A}{x^2}z$ und $\frac{dz}{dx} = -\frac{x}{A}(2\lambda + \lambda' x)$ ist.

Setzen wir dies ein, so wird

$$-\frac{x\,\frac{d\lambda}{dx}}{2} = \frac{-0{,}2\,\lambda^3 - 17{,}04\,\lambda^2 + 455{,}04\,\lambda - 3628{,}8}{-213{,}12 + 5{,}76\,\lambda + \lambda^2}$$

oder nach Trennung der Variabeln:

$$\frac{2}{5x}\,dx = \frac{-213{,}12 + 5{,}76\,\lambda + \lambda^2}{\lambda^3 + 85{,}2\,\lambda^2 - 2275{,}2\,\lambda + 18\,144}\,d\lambda .$$

Wir zerlegen die gebrochene rationale Funktion auf der rechten Seite in Partialbrüche und erhalten nach der Integration zwischen den Grenzen null und λ

$$\tfrac{2}{5}\ln x = 0{,}7581 \ln \frac{107{,}85 + \lambda}{107{,}85} + 0{,}1210 \ln \frac{\lambda^2 - 22{,}65\,\lambda + 168{,}2}{168{,}2}$$
$$-0{,}0664 \left\{ \operatorname{arctg} \frac{2\,\lambda - 22{,}65}{12{,}65} + \operatorname{arctg} 1{,}790 \right\}.$$

Berücksichtigen wir, daß die Bedingung für Ablösung lautete: $\lambda = -12$, so ergibt sich für den Ablösungspunkt:

$$\tfrac{2}{5}\ln x_0 = 0{,}7581 \ln 0{,}8887 + 0{,}1210 \ln 3{,}471 - 0{,}0664\,\{\operatorname{arctg} 1{,}790 - \operatorname{arctg} 3{,}688\}$$

oder ausgerechnet $x_0 = 1{,}214$.

Wir haben also das merkwürdige Ergebnis erhalten, daß auch für geradlinige Diffusoren mit beliebig kleinem Oeffnungswinkel auf Grund der Grenzschichten-Theorie sich stets eine Ablösungsstelle angeben läßt, und zwar entspricht derselbe einer Querschnittserweiterung von 1,214 : 1, d. h. etwa 21—22 vH. Jedoch ist dies Ergebnis physikalisch nicht bindend, da im Falle der Ablösung die Druckverteilung von der hier zugrunde gelegten in der Nähe der Ablösungsstelle abweicht, insbesondere aber in der Praxis die Grundströmung selbst zumeist turbulent ist.

Ganz anders gestalten sich die Verhältnisse für den konvergenten Kanal. Wir nehmen dann im Punkte 0 eine Senke an, deren Intensität wiederum mit $2\pi A$ bezeichnet werde. Die radiale Geschwindigkeitsverteilung ist für diesen Fall $U = -\frac{A}{x}$ und die Differentialgleichung heißt jetzt

$$\frac{x\,\frac{d\lambda}{dx}}{4{,}4} = \frac{\lambda^3 + 12{,}98\,\lambda^2 - 400{,}6\,\lambda + 1649}{213{,}12 - 5{,}76\,\lambda - \lambda^2}$$

Die Integration erfolgt wiederum durch Trennung der Variabeln:

$$\frac{4,4}{x}\,dx = \frac{213,12 - 5,76\,\lambda - \lambda^2}{\lambda^3 + 12,98\,\lambda^2 - 400,6\,\lambda + 1649}\,d\lambda$$

und liefert:

$$4,4 \ln x = 0,2473 \ln(\lambda - 10,34) - 0,9115 \ln(\lambda - 5,530) - 0,3363 \ln(\lambda + 28,85) + c.$$

Bei dieser Strömung läßt sich, wie vorauszusehen war, keine Ablösungsstelle angeben.

Da sich für das zuletzt behandelte Beispiel der Senke die strenge Integration der Differentialgleichung für den Fall unendlich langer Wände durchführen läßt, so soll der Vergleich mit ihr und der Näherungslösung geführt werden.

Wir setzen die Stromfunktion an in der Form

$$\psi = \psi(t), \quad t = \frac{y}{x}$$

und erhalten

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{1}{x}\,\psi', \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{y}{x^2}\,\psi'$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\psi''\frac{y}{x^3} - \psi'\frac{1}{x^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\psi''}{x^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\psi'''}{x^3}.$$

Das Druckgefälle $\frac{dp}{dx}$ berechnet sich zu:

$$-\frac{1}{\varrho}\frac{dp}{dx} = UU' = -\frac{A^2}{x^3}.$$

Setzen wir diesen Wert in die Differentialgleichung der Grenzschicht ein, so ergibt sich die gewöhnliche Differentialgleichung dritter Ordnung:

$$-\psi'^2 = -A^2 + \nu\,\psi'''.$$

Wir bezeichnen ψ' mit ζ

$$-\zeta^2 = -A^2 + \nu\,\zeta''$$

oder

$$-\frac{\zeta^3}{3} = -A^2\zeta + \nu\,\frac{\zeta'^2}{2} + B.$$

Die Integrationskonstante B bestimmen wir aus der Bedingung, daß für $\zeta' = 0$, $\zeta = -A$ sein soll

$$B = -{}^2/_3\,A^3 \quad \text{und} \quad \frac{\nu}{2}\,\zeta'^2 = -\frac{\zeta^3}{3} + A^2\zeta + {}^2/_3\,A^3$$

oder

$$\sqrt{\frac{3\nu}{2}}\,\zeta' = (\zeta + A)\sqrt{2A - \zeta}\,, \quad \frac{1}{x}\,dy = \sqrt{\frac{3\nu}{2}}\,\frac{d\zeta}{(\zeta + A)\sqrt{2A - \zeta}}.$$

Wir machen nun die Substitution $2\sqrt{2A - \zeta} = q$ oder $\frac{-d\zeta}{\sqrt{2A - \zeta}} = dq$ und erhalten:

$$\sqrt{\frac{2A - \zeta}{3A}} = \mathfrak{Tg}\left(\alpha + \sqrt{\frac{A}{2\nu}}\,\frac{y}{x}\right).$$

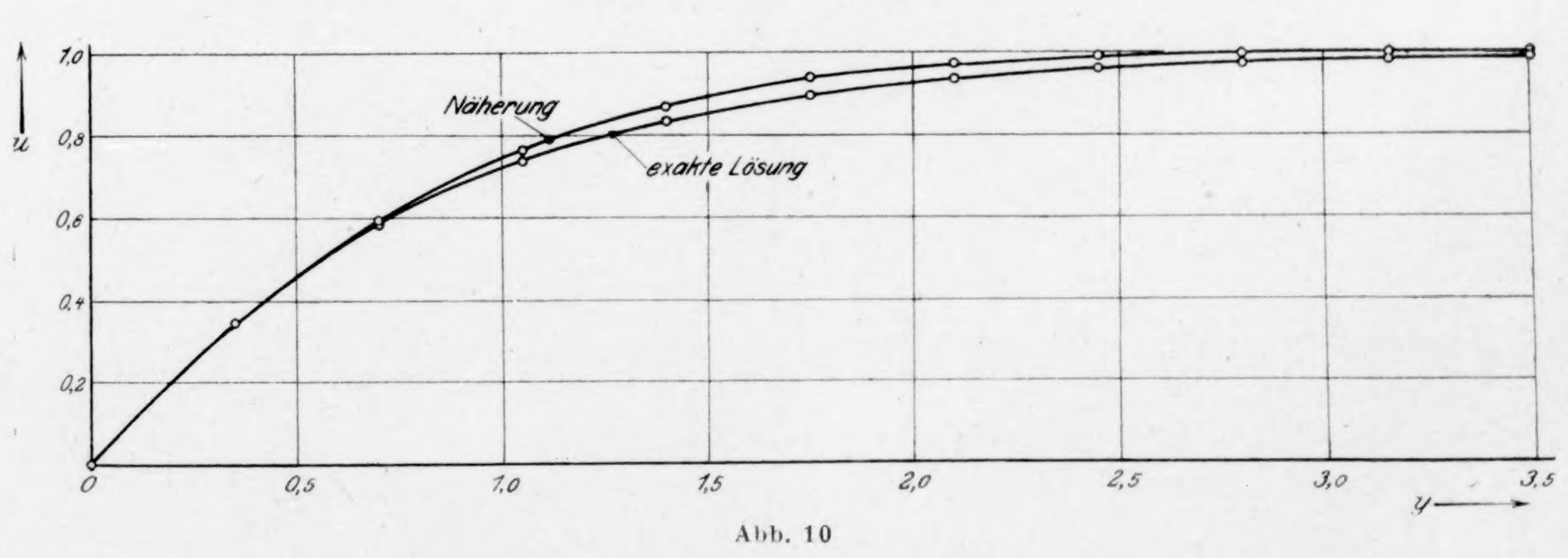


Abb. 10

Die Integrationskonstante α bestimmt sich aus $y = 0$ für $\zeta = 0$

$$2 - 3\,\mathfrak{Tg}^2\,\alpha = 0, \quad \mathfrak{Tg}\,\alpha = \sqrt{2/3}\,, \quad \alpha = 1{,}146,$$

so daß

$$\zeta = 2A - 3A\,\mathfrak{Tg}^2\left(1{,}146 + \sqrt{\frac{A}{2\nu}\,\frac{y}{x}}\right).$$

In Abb. 10 ist für $A = 1$, $\nu = 1$, $x = 1$ das Profil der Grenzschicht sowohl nach der exakten Lösung als auch nach der Näherungslösung aufgezeichnet. Die Wurzel, die hierbei für die Näherungslösung zu benutzen ist, lautet: 10,34. 85

Der Wärmeübergang an einen turbulenten Flüssigkeits- oder Gasstrom.[1]

Von **H. LATZKO** in Aachen.

Die Theorie des Wärmeüberganges von einem festen Körper an einen Flüssigkeitsstrom konnte bisher nur unter beschränkenden Annahmen über die Flüssigkeitsbewegung[2]) (Potentialströmung, laminare Reibungsströmung) durchgeführt werden[3]).

In dem praktisch wichtigsten Falle turbulenter Strömung sind die bisherigen theoretischen Ansätze über Dimensionsformeln und gewisse Analogieschlüsse von Reibungszahlen auf Wärmeübergangszahlen nicht hinausgegangen[4]). Um zu zahlenmäßigen Ergebnissen zu gelangen, war man auf eine experimentelle Behandlung des Problems angewiesen, was bei seiner Wichtigkeit für viele Zweige der Technik zu sehr zahlreichen Untersuchungen Anlaß gegeben hat, deren Ergebnisse jedoch vielfach voneinander abweichen. Insbesondere bleiben die gewonnenen Resultate an die Ausmaße und besonderen Verhältnisse der einzelnen Versuchseinrichtungen gebunden.

In der vorliegenden Arbeit soll nun der Versuch gemacht werden, auf Grund der von Prandtl und v. Kármán aufgestellten Ansätze über die Geschwindigkeitsverteilung turbulenter Ströme, die Theorie der Wärmeübertragung und die Abhängigkeit der Wärmeübergangszahl von Form und Abmessungen, für turbulente Strömungen systematisch zu entwickeln.

1. Hydrodynamische Grundlagen. Wir wollen zuerst diejenigen Ergebnisse der Prandtl-Kármánschen Theorie[5]) zusammenstellen, die wir im weiteren Verlauf ständig gebrauchen werden.

Für die Verteilung der Schubspannung in unmittelbarer Wandnähe ergibt sich durch eine Dimensionsbetrachtung der Ausdruck:

$$\tau = \frac{7}{B}\,\tau_0^{3/7}\,\varrho^{3/7}\,\mu^{1/7}\,y^{6/7}\,\frac{\partial u}{\partial y} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1),$$

[1]) Auszug aus einer von der philosophischen Fakultät der Universität Wien angenommenen Dissertation.

[2]) Solange die Geschwindigkeiten weit unterhalb der Schallgeschwindigkeit bleiben, befolgen bekanntlich kompressible Flüssigkeiten (Gase) und inkompressible angenähert dieselben Strömungsgesetze; wir werden daher im folgenden den Ausdruck Flüssigkeitsströmung sowohl für wirkliche Flüssigkeiten als auch für Gase gebrauchen.

[3]) Vgl. z. B. J. Boussinesq, Calcul du pouvoir refroidissant des courants fluides. Journ. de math. pures et appl. 1905, S. 285.

W. Nusselt, Die Abhängigkeit der Wärmeübergangszahl von der Rohrlänge, Z. d. V. d. I. Bd. 54, 1910, S. 1154.

E. Pohlhausen, Der Wärmeaustausch zwischen festen Körpern und Flüssigkeiten mit kleiner Reibung und kleiner Wärmeleitung, diese Zeitschr. Bd. 1, 1921, 115 bis 121.

[4]) O. Reynolds, An Experimental Investigation of the Circ. which datermine whether the Motion of Water shall be Direct or Sinuous, and of the Law of Resistance in Parallel Channels Phil. Transact. of the Roy. Soc. Vol. 174, III Proceedings, Manchester Lit. and Phil. Soc. 1874, p. 9.

E. Stanton, On the Passage of Heat between Metal Surfaces and Liquids in contact with them Phil. Transact. of the Roy. Soc. Vol 190.

W. Nusselt, Der Wärmeübergang in Rohrleitungen, Mittlg. über Forsch.-Arb. V. d. I. Heft 89.

L. Prandtl, Eine Beziehung zwischen Wärmeaustausch und Strömungswiderstand der Flüssigkeit, Physik. Zeitschr. 11, 1910. S. 1072—1078.

[5]) Siehe die Arbeit von v. Kármán, dieses Heft S. 233—252.

wobei die Zeichen

u = Geschwindigkeit in der Stromrichtung,
τ_0 = Schubspannung an der Wand, y = Wandabstand,
μ = Konstante der inneren Reibung, ϱ = Dichte,
$\nu = \mu : \varrho$ = Zähigkeitszahl,
B = eine Konstante = 8,82 [1])

bedeuten.

In demselben Gebiet folgt die Geschwindigkeit, wenn wir die Schubspannung an der Wand als bekannt voraussetzen, der Gleichung

$$u = B \left(\frac{\tau_0}{\varrho}\right)^{4/7} \left(\frac{y}{\nu}\right)^{1/7} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Um zur Verteilung der Geschwindigkeit und Schubspannung für das ganze Flüssigkeitsgebiet zu gelangen, gibt es zwei Wege. Entweder man geht von (2) aus und setzt:

$$u(y) = y^{1/7} \{A_0 + A_1 y + A_2 y^2 + \ldots\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2\,\mathrm{a}),$$

wobei die Konstante A_0 sich aus der Forderung bestimmt, daß (2a) für kleine Werte von y in (2) übergeht, oder man kann auch den Ansatz (1) für die zwischen den einzelnen Schichten übertragene Schubspannung erweitern und schreibt:

$$\tau = K\,[Y(y)]^{6/7} \frac{\partial u}{\partial y} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1\,\mathrm{a}),$$

wobei Y in der Nähe der Wand in y übergehen muß. Mit diesen Ansätzen sind wir imstande, das Geschwindigkeitsfeld einer turbulenten Strömung, solange keine Ablösung derselben von den festen Begrenzungswänden erfolgt, zu berechnen.

Für den besonderen Fall eines Kreisrohres wurde in der vorangehenden Arbeit von v. Kármán gezeigt, daß man die Versuchsresultate über die Geschwindigkeitsverteilung mit genügender Genauigkeit wiedergeben kann, falls man für die Funktion $Y(y)$, die wir als »Einflußfunktion« bezeichnen wollen, setzt:

$$Y = \frac{r^2 - \bar{y}^2}{2\,r} \qquad [\bar{y} = r - y].$$

Für den zeitlich und räumlich stationären Zustand erhält man dann für die Geschwindigkeitsverteilung:

$$u = u_{\max} \left[1 - \left(\frac{\bar{y}}{r}\right)^2\right]^{1/7} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

und schließlich folgt noch das Verhältnis der maximalen Geschwindigkeit in der Rohrachse $u_{\max}$ zur mittleren Geschwindigkeit des Querschnittes v zu

$$v = \frac{7}{8}\,u_{\max} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4).$$

2. Die turbulente Wärmeleitfähigkeit. Im folgenden beschäftigen wir uns ausschließlich mit der Wärmefortpflanzung durch Materie und beschränken uns demgemäß auf ein Temperaturgebiet, in welchem die durch Strahlung übertragene Wärmemenge gegenüber dem durch materielle Teilchen überführten Anteil zurücktritt. Ferner soll die Geschwindigkeitsverteilung lediglich durch äußere Umstände bedingt sein, d. h. wir vernachlässigen den Einfluß des Temperaturfeldes auf das Geschwindigkeitsfeld. Bei turbulenter Bewegung, die ja an verhältnismäßig große Strömungsgeschwindigkeiten gebunden ist, kommt — soweit die Dichteunterschiede im Querschnitt infolge von Temperaturänderungen nicht zu groß sind — der dadurch begangene Fehler nicht in Betracht.

Entsprechend den Anschauungen, die man von der Theorie der Wärmeleitung in festen Körpern übernommen hat, pflegt man auch bei der Wärmeausbreitung in Flüssigkeiten im allgemeinen zwischen der Wärmeleitfähigkeit, die ein Ausdruck für den Wärmetransport durch die Molekularbewegung sein soll, und der sogenannten Wärmekonvektion, d. h. der Wärmeausbreitung durch molare Bewegungen, zu unterscheiden, benutzt also als einteilendes Prinzip die Größenordnung der Wärmeträger. Sowohl für die mathematische Behandlung als auch für das Verständnis des Vorganges erscheint jedoch eine etwas andere Fassung vorteilhafter, welche die Art der Bewegung der Wärmeträger in den Vordergrund rückt.

[1]) Der Wert der Konstante entspricht dem Ansatz für die Geschwindigkeitsverteilung, die unten benutzt wird. Vgl. Gl. (8).

Dementsprechend wollen wir unter »Wärmeleitung« in Flüssigkeiten die Ausbreitung der Wärme durch die ungeordnete Bewegung der Moleküle verstehen, wie wir sie uns nach dem Bilde der kinetischen Gastheorie vorzustellen haben. Als charakteristisch für die molekulare Wärmebewegung werden wir dann den Umstand ansehen, daß sie bei einem bestimmten Druck und einer bestimmten Dichte der Flüssigkeit eine reine Temperaturfunktion ist und insbesondere vom Bewegungszustand der Flüssigkeit nicht abhängt. »Wärmekonvektion« hingegen soll die Uebertragung von Wärme durch eine geordnete Bewegung der Flüssigkeitsteilchen bezeichnen. Der in vielen Lehrbüchern der Physik eingeführte Begriff der Konvektion, als der Entstehung einer natürlichen Strömung durch Dichteunterschiede unter der Einwirkung der Schwerkraft, ist dann in dieser Definition mit enthalten.

Bei laminarer Strömung sind damit alle Anteile der Wärmeübertragung erledigt. Bei turbulenter Strömung sehen wir aber, daß uns nun noch eine Art der Wärmeausbreitung fehlt. Bekanntlich stellt man sich die stationäre turbulente Bewegung so vor, daß man jeder Stelle einen gewissen mittleren Geschwindigkeitsvektor zuschreiben kann und daß sich diesem Vektor ein nach Richtung und Größe schwankender Geschwindigkeitsvektor überlagert, dessen Mittelwert über eine genügende Zeitspanne gleich Null ist. Nach v. Kármán kann man z. B. dieses kinematische Bild durch die Vorstellung genauer beschreiben, daß in der gesamten mit einer bestimmten Geschwindigkeitsverteilung fortbewegten Flüssigkeitsmasse ungeordnet durcheinander bewegte Wirbelfäden schwimmen, deren Bewegungen, so wie diejenige der Moleküle, statistischen Gesetzen gehorchen. Der schwankende Zusatz-Geschwindigkeitsvektor an einem Punkt der Flüssigkeit ist dann durch die Zirkulation und die relative Lage der gesamten Wirbelfäden bedingt.

Diese Vorstellung führt dazu, abgesehen von der gewöhnlichen Wärmeleitfähigkeit, die als Ausdruck für das statistische Gesetz der Molekularbewegung erscheint, noch eine Leitfähigkeit der turbulenten Bewegung einzuführen, die den statistischen Einfluß der Wirbelbewegung auf die Wärmeausbreitung zum Ausdruck bringt. Diese wird dann im Gegensatz zur gewöhnlichen Leitfähigkeit in erster Linie vom Bewegungszustand der Flüssigkeit, der insbesondere durch die Beschaffenheit der festen Begrenzungsflächen bedingt ist, abhängen.

Der Gedanke, diese Erscheinung durch Einführung einer erhöhten Leitfähigkeit für die turbulente Bewegung zu berücksichtigen, ist bekannt. Mehrere Autoren haben verschiedene Ansätze vorgeschlagen, bei denen die erhöhte Leitfähigkeit als eine empirische Funktion der Geschwindigkeit angesehen wird. Wesentlich näher ist man zu der Erkenntnis der Verhältnisse durch die Betrachtungen Reynolds' und Prandtls gelangt. Beide gehen von der Vorstellung aus, daß turbulente Reibung und turbulente Wärmeübertragung soweit analoge Vorgänge sind, daß derselbe Mechanismus, welcher in dem ersten Falle einen »Impulstransport« bewirkt, in dem zweiten Falle zur Wärmeausbreitung führt. Reynolds[1]) hat in intuitiver Weise nach dieser Ueberlegung aus der Widerstandszahl unmittelbar auf die Wärmeübergangszahl in Kreisrohren geschlossen, also gewissermaßen die Integralvorgänge verglichen. Prandtl[1]) stellt demgegenüber die exakten Bedingungen auf, unter denen ein direkter Analogieschluß erlaubt ist; er zeigt, daß in gewissen Fällen das Temperaturfeld ein genaues Abbild des Geschwindigkeitsfeldes ist, so daß die Kenntnis der Bewegung unmittelbare Schlüsse auf den Wärmezustand zuläßt. Er zeigt aber, daß gerade im kreisförmigen Rohre dies nicht genau der Fall ist, so daß man nur auf die Form der Abhängigkeit von den verschiedenen Parametern schließen kann, ohne zu zahlenmäßigen Ergebnissen zu gelangen. Die neuen Fortschritte (siehe **1**) zur Darstellung der Gesetzmäßigkeiten der turbulenten Strömung und der ihr entsprechenden Geschwindigkeitsverteilung ermöglichen nun eine genauere Fassung des »Elementargesetzes« für den turbulenten Wärmeaustausch, so daß die nachfolgenden Ausführungen nach zwei Richtungen über die Prandtlschen Ergebnisse hinausgehen, indem sie erstens zahlenmäßige Ergebnisse liefern, zweitens eine rechnerische Verfolgung der verschiedensten Anordnungen gestatten, bei denen keine räumliche Konstanz des Geschwindigkeits- und Temperaturfeldes vorliegt. Dies ermöglicht eine ausführliche Diskussion der Versuchsergebnisse, welche die einzelnen Abweichungen erklärt.

[1]) s. Fußnote 4, S. 268.

3. Das Elementargesetz des turbulenten Wärmeaustausches. Zunächst wollen wir den Gedankengang der kinetischen Gastheorie, der zum Differentialgesetz der inneren Reibung und der Wärmeübertragung durch ungeordnete Molekularbewegung führt, auf diesen Fall der turbulenten Unordnung übertragen.

Wir betrachten eine Schicht im Abstande y von der Wand; es herrsche dort die mittlere Geschwindigkeit u in Richtung der Strömung und $|w|$ sei der mittlere absolute Betrag der Geschwindigkeit senkrecht zur Stromrichtung. In zwei Schichten im Abstande $\pm \frac{\varkappa}{2}$ von der betrachteten Schicht y (wobei wir unter $\varkappa$ eine Art »mittlere Weglänge« verstehen) herrscht dann die mittlere Stromgeschwindigkeit

$$u \pm \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\varkappa}{2}.$$

Der Impulstransport pro Flächeneinheit senkrecht zur mittleren Strömung ist mit einem Proportionalitätsfaktor, der von der Art der kohärenten Flüssigkeitsteile und der zeitlichen Mittelwertbildung abhängt, durch den Ausdruck gegeben:

$$\beta \varrho w \frac{\partial u}{\partial y} \varkappa = \tau \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

und ist gleich der Schubspannung τ an der Stelle y.

Bezeichnet C die spezifische Wärme der Volumeinheit, so ist andererseits der Wärmetransport q pro Flächeneinheit ebenfalls senkrecht zur mittleren Strömung gegeben durch:

$$q = \beta C w \frac{\partial \vartheta}{\partial y} \varkappa \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6).$$

Dies besagt, daß dieselben Flüssigkeitsteilchen, die durch ihre Impulsübertragung die Schubspannung τ erzeugen, auch die Wärme übertragen. Durch eine Art Abzählung dieser Teilchen kann somit das Maß der übertragenen Wärme berechnet werden.

Eine solche »Abzählung« ist nun, wie man leicht sieht, durch das Produkt $\beta \omega \varkappa$ gegeben. Wir wollen es den Turbulenzkoeffizienten nennen. Der Turbulenzkoeffizient zusammen mit der Stoffkonstanten C stellt genau ebenso einen Ausdruck für das statistische Gesetz der Wärmeübertragung im Falle turbulenter Strömung dar, wie die Leitfähigkeit λ im Falle der Ruhe.

Den Turbulenzkoeffizienten können wir aus unserer früher gewonnenen Kenntnis des Strömungszustandes berechnen.

Es war nach Gleichung (1) und (1 a)

$$\tau = \varrho \varphi(y) \frac{\partial u}{\partial y},$$

somit folgt:

$$\beta w \varkappa = \varphi(y) = \frac{7}{B} \frac{\tau_0^{3/7}}{\varrho^{4/7}} \mu^{1/7} y^{6/7} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7).$$

Der Ansatz (1) soll die gesamte Wirkung der Impulsleitung (innere Reibung) und des Impulstransportes durch Wirbelkonvektion zum Ausdruck bringen. Dementsprechend sind sowohl der Ansatz selbst, als die daraus entspringende Geschwindigkeitsverteilung lediglich als asymptotische Ausdrücke für sehr große Reynoldssche Zahlen anzusehen, bei denen die Wirkung der Impulsleitung neben dem zweiten Anteil des Reibungsmechanismus zurücktritt. Es zeigt sich aber, daß die Proportionalität zwischen τ und $v^{7/4}$ bereits bei Werten der Reynoldsschen Zahl, die etwa der 5fachen kritischen Geschwindigkeit entsprechen, eine sehr gute Annäherung darstellt. Wir schließen daraus, daß die statistischen Gesetze für den molekularen und molaren Impulstransport bereits bei mäßigen Reynoldsschen Zahlen sich in guter Annäherung durch den gemeinsamen Ausdruck (1) darstellen lassen.

Dadurch, daß wir Gl. (1) zur Berechnung von $\beta \omega \varkappa$ herangezogen haben, haben wir die Annahme getroffen, daß sich auch die gesamte Wärmeübertragung durch ein gemeinsames statistisches Gesetz ausdrücken läßt, das molekulare und molare Vorgänge zusammenfaßt. Wir haben daher angenommen, daß bei den molekularen Vorgängen dieselbe Proportionalität zwischen Impuls- und Energieübertragung besteht, wie es bei den molaren Vorgängen der Fall ist; d. h., wir setzen voraus, daß λ und μ in demselben Verhältnis wie C und ϱ zueinander stehen.

Der dadurch begangene Fehler wird für Gase, wie die folgende Ueberlegung zeigt, vernachlässigbar. Einerseits überwiegt nämlich der durch die reine turbulente

Leitfähigkeit übertragene Teil an Wärme, wie ein Vergleich der W.-Ue.-Zahlen (Wärme-Uebergangszahlen) für laminare und turbulente Strömung zeigt, den durch gewöhnliche Leitung übertragenen um ein Vielfaches; anderseits ist je nach der Atomzahl der Gase das Verhältnis $\frac{\lambda \varrho}{C\mu}$ zwischen 1,25 und 0,97 gelegen, d. h. auch der molekulare Mechanismus der Impulsleitung (innere Reibung) und Wärmeleitung sind im wesentlichen ähnlich. Wir werden demnach für Gase und überhitzte Dämpfe praktisch auch quantitativ richtige Ergebnisse von unserer Rechnung erwarten können. In diesem Sinne sollen die folgenden Ausführungen verstanden werden. Auf den Fall, daß $\frac{\lambda \varrho}{C\mu}$ von 1 sehr verschieden ist, werde ich am Schlusse der Arbeit noch einmal zurückkommen.

Unter Berücksichtigung von (6) und (7) erhalten wir demnach für die durch die Flächeneinheit einer Schicht im Abstande y transportierte Gesamtwärme q:

$$q = \frac{7}{B}\left(\frac{\tau_0}{\varrho}\right)^{3/7} \nu^{1/7}\, C\, Y^{6/7} \frac{\partial \vartheta}{\partial y} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (8).$$

Für die praktischen Anwendungen wollen wir den Grenzwert von q für $y = 0$, d. h. die von der Flächeneinheit der Wand übergehende Wärmemenge, berechnen.

Die Geschwindigkeit u soll dargestellt werden durch:

$$u(y) = y^{1/7}\{A_0 + A_1 y + A_2 y^2 + \ldots\}.$$

Die Schubspannung τ hat für $y = 0$ einen festen Grenzwert und ist als Funktion von y in der Nähe von $y = 0$ regulär. Wir können also τ in eine Potenzreihe nach y entwickeln.

$$\tau = \beta w \varkappa \varrho \frac{\partial u}{\partial y} = \tau_0 + \tau_1 y + \tau_2 y^2 + \ldots$$

Setzen wir $\frac{\partial u}{\partial y}$ ein, so folgt für $\beta w \varkappa$:

$$\beta w \varkappa = \frac{1}{\varrho} \frac{\tau_0 + \tau_1 y + \tau_2 y^2 + \ldots}{{}^1/_7 A_0 + {}^8/_7 A_1 y + \ldots} y^{6/7}.$$

Denken wir diesen gebrochenen Ausdruck in der Umgebung von $y = 0$ nach Potenzen von y entwickelt, so folgt:

$$\beta w \varkappa = \frac{7}{\varrho} \frac{\tau_0}{A_0} y^{6/7}\{1 + \alpha y + \ldots\}.$$

Berücksichtigen wir die Gleichung (6), so erhalten wir schließlich:

$$q_0 = \frac{7}{\varrho} \frac{\tau_0}{A_0} C \lim_{y=0}\left[\frac{\partial \vartheta}{\partial y} y^{6/7}\right] \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (9).$$

4. Der Wärmeaustausch in Rohren. Bei der stationären Strömung durch ein Rohr kann man zwei Bereiche unterscheiden:

1. Den hydrodynamisch ausgebildeten Zustand, d. i. jenen, bei dem sich die einzelnen Querschnitte längs der Stromrichtung nicht mehr voneinander unterscheiden. Es hat sich ein gewisses Geschwindigkeitsprofil ausgebildet, das dann konstant erhalten bleibt.

2. Den hydrodynamisch unausgebildeten Zustand im Rohranfang. Nehmen wir z. B. an, daß die Flüssigkeit aus einem großen Behälter durch glatten Uebergang in das Rohr einströmt, so werden im Einströmungsquerschnitt alle Stromfäden angenähert gleiche Geschwindigkeit haben. Beim weiteren Fortschreiten werden dann die wandnahen Schichten durch die Reibung verzögert, bis sich jenes konstante Geschwindigkeitsprofil ausgebildet hat, das dem Gleichgewichtszustand entspricht. Man nennt oft diesen Teil des Rohres die Anlaufstrecke.

Wir berechnen in den folgenden Abschnitten das Temperaturfeld und den Wärmeübergang im Rohre, falls für den Einströmquerschnitt eine Temperaturverteilung vorgegeben ist und die Rohrwandtemperatur in der Stromrichtung konstant gehalten wird. Wir stellen für die beiden erwähnten Bereiche getrennte Lösungen auf, können aber durch einen stetigen Uebergang von der ersten Lösung zur zweiten erreichen, daß sich die allgemeine Aufgabe durch eine Aneinanderreihung der Teillösungen befriedigen läßt.

5. Der Wärmeübergang bei hydrodynamisch ausgebildetem Zustand. Um die Differentialgleichung für das Temperaturfeld aufzustellen, betrachten wir ein Volumelement, das durch zwei konzentrische Zylinderflächen, die zur Rohrwand parallel

sind und zwei dazu senkrechte Querschnitte begrenzt ist. Um die Vorstellung zu fixieren, nehmen wir an, daß eine warme Flüssigkeit durch ein kälteres Rohr fließt, d. h. der Wärmestrom soll von der Flüssigkeit zur Wand gehen. Wir setzen ferner die konstante Rohrtemperatur gleich 0, so daß die Temperatur der Flüssigkeit ϑ die Uebertemperatur über die Wandtemperatur bedeutet. Da wir jedoch keine Annahme treffen, welche die eine Richtung des Wärmestromes vor der anderen auszeichnet, so gelten alle Beziehungen ebenso, wenn ϑ sein Vorzeichen wechselt.

Bezeichnet z = die Koordinate der Stromrichtung,
y = den Abstand von der Achse,
C = die spez. Wärme pro Volumeinheit,

so gibt die Wärmebilanz für den stationären Zustand:

$$\frac{\partial}{\partial y}\{2\pi y q\} = Cu\frac{\partial \vartheta}{\partial z}\,2\pi y \quad \ldots\ldots\ldots \quad (10).$$

Für u ist gemäß Gl. (3) und (4) einzusetzen:

$$u = {}^7/_8\, v\left\{1-\left(\frac{y}{r}\right)^2\right\}^{1/7},$$

während q nach Gl. (8) unter Berücksichtigung von (1 a), (3) und (4) zu:

$$q = 0{,}199\,\frac{v^{3/4}\,\nu^{1/4}\,C}{(2r)^{3/28}}\left(\frac{r^2-y^2}{2r}\right)^{6/7}\frac{\partial \vartheta}{\partial y}$$

folgt.

Führen wir dies in Gl. (10) ein, so erhalten wir schließlich als Differentialgleichung für den Wärmeaustausch bei hydrodynamisch ausgebildetem Strömungszustand:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left\{y\left(\frac{r^2-y^2}{2r}\right)^{6/7}\frac{\partial \vartheta}{\partial y}\right\} = Ky\left\{1-\left(\frac{y}{r}\right)^2\right\}^{1/7}\frac{\partial \vartheta}{\partial z} \quad \ldots\ldots \quad (11),$$

wobei

$$K = {}^8/_7\,\frac{v^{1/4}\,(2r)^{3/28}}{0{,}199\,\nu^{1/4}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (11\,\text{a})$$

gesetzt ist.

Die Randbedingungen lauten:

I) $\vartheta = 0$ für $y = r$ und wegen der allseitigen Symmetrie

II) $\frac{\partial \vartheta}{\partial y} = 0$ für $y = 0$. Ferner muß

III) für $z = 0$ die radiale Temperaturverteilung vorgegeben sein.

Da sich die Flüssigkeitstemperatur mit zunehmender Rohrlänge der Wandtemperatur asymptotisch nähert, so setzen wir die Lösung in der Form an:

$$\vartheta = g(y)e^{-kz}.$$

Führt man diesen Ausdruck in die Gleichung ein, so erhält man für die Funktion g die gewöhnliche Differentialgleichung:

$$\frac{d}{dy}\left\{y\left(\frac{r^2-y^2}{2r}\right)^{6/7}\frac{dg}{dy}\right\} = -kKgy\left\{1-\left(\frac{y}{r}\right)^2\right\}^{1/7},$$

welche nach Wegschaffung der gebrochenen Exponenten durch die Transformation $\left\{1-\left(\frac{y}{r}\right)^2\right\}^{1/7} = x$ übergeht in:

$$\frac{d}{dx}\left\{(1-x^7)\frac{dg}{dx}\right\} = -\,\omega x^7 g \quad \ldots\ldots\ldots \quad (12),$$

wenn

$$\omega \text{ für } 4gkK\left(\frac{r}{2}\right)^{8/7} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (12\,\text{a})$$

geschrieben wird.

Die Randbemerkungen lauten jetzt:

I) $g = 0$ für $x = 0$ und

II) $\frac{dg}{dx}$ endlich für $x = 1$.

Wir gelangen zu einer angenäherten Lösung mit Hilfe des Ritzschen Verfahrens, indem wir die Aufgabe in ein Variationsproblem verwandeln. Dieses lautet, wie sich leicht verifizieren läßt:

$$\int_0^1\left\{(1-x^7)\left(\frac{dg}{dx}\right)^2 - \omega x^7 g^2\right\}dx = \text{Minimum} \quad \ldots\ldots \quad (13)$$

mit den Randbedingungen I und II als Nebenbedingung. Wir haben es hier mit einem Eigenwertproblem **zu tun, da die Gleichung** (13) **Lösungen, die auch die Randbedingungen befriedigen, nur für bestimmte Werte** von ω **haben wird.** Wir **setzen für** g an:

$$g(x) = g_1 P_1(x) + g_2 P_3(x) + g_3 P_5(x) + \ldots \qquad (14),$$

wobei g_1, g_2, g_3 **unbestimmte Koeffizienten und die** $P_1, P_3 \ldots$ **die Legendreschen Kugelfunktionen erster Art** bedeuten sollen und beschränken **uns zunächst auf drei Glieder.** Die Minimalbedingung liefert dann eine Gleichung dritten Grades für ω, deren Wurzel sind:

$$\omega_1 = 8{,}712, \quad \omega_2 = 164{,}36, \quad \omega_3 = 1700{,}40 \qquad (14\,\mathrm{a}).$$

Die Eigenfunktionen normieren wir in Abweichung von dem üblichen Verfahren so, daß

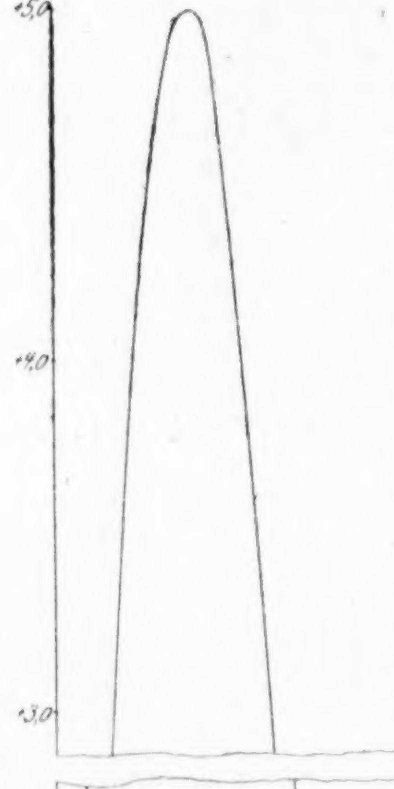
$$g_1 + g_2 + g_3 = 1 \qquad (15),$$

ist, um zu erreichen, daß die Temperatur **in der Rohrachse** 1 **wird;** $g(y)$ **ist somit das Verhältnis der Temperatur an der betreffenden Stelle zu der Temperatur in der Rohrachse. Wir finden so die ersten Eigenfunktionen:**

$$\left.\begin{aligned} g_I &= 0{,}9703\,P_1 + 0{,}0212\,P_3 + 0{,}0085\,P_5 \\ g_{II} &= -0{,}7312\,P_1 + 0{,}9665\,P_3 + 0{,}7647\,P_5 \\ g_{III} &= 2{,}6552\,P_1 - 6{,}1589\,P_3 + 4{,}5037\,P_5 \end{aligned}\right\} \quad (16).$$

Wir wollen nunmehr noch die Wahl der Entwicklung nach Kugelfunktionen näher begründen. Da es sich um ein Minimalproblem handelt, so kann der exakte Eigenwert nur kleiner **sein als jeder Näherungswert.** Die **Größe der Eigenwerte,** die man je nach der Wahl des Reihenansatzes für die zu variierende Funktion erhält, bildet somit ein geeignetes Kriterium für die Güte der Annäherung. Es zeigt sich nun, daß im Vergleich mit einem einfachen Potenzansatz nach x, sowie mehreren Fourierentwicklungen, der Ansatz nach Kugelfunktionen zu den kleinsten Eigenwerten führt. Was das Verhalten bei Weitertreiben der Näherungen anlangt, so liefern die 3 ersten Näherungen für den ersten Eigenwert, z. B. nacheinander die Werte 8,75, 8,67, 8,71, die Konvergenz des Verfahrens dürfte somit befriedigend sein.

Um auch für die weiteren Eigenwerte zu gleich guten Resultaten zu kommen, müßten natürlich weitere Näherungen



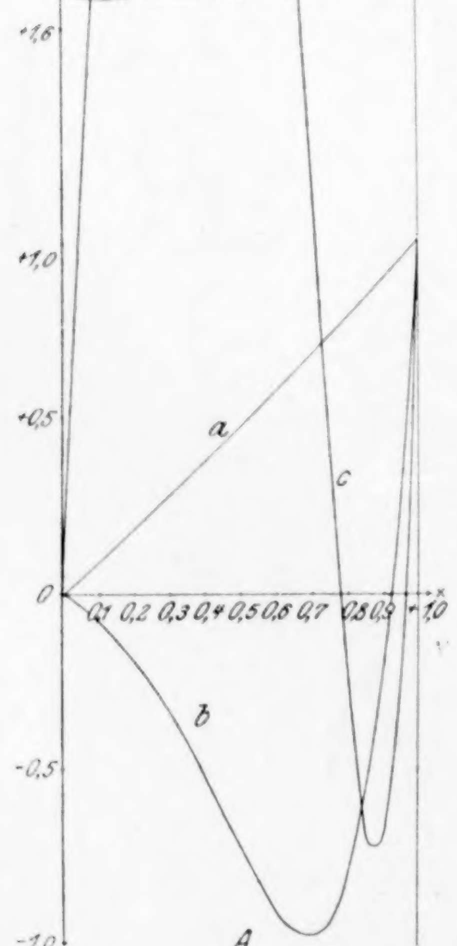


Abb. 1 A. Die drei Eigenfunktionen a, b, c aufgetragen über x als Abscisse.

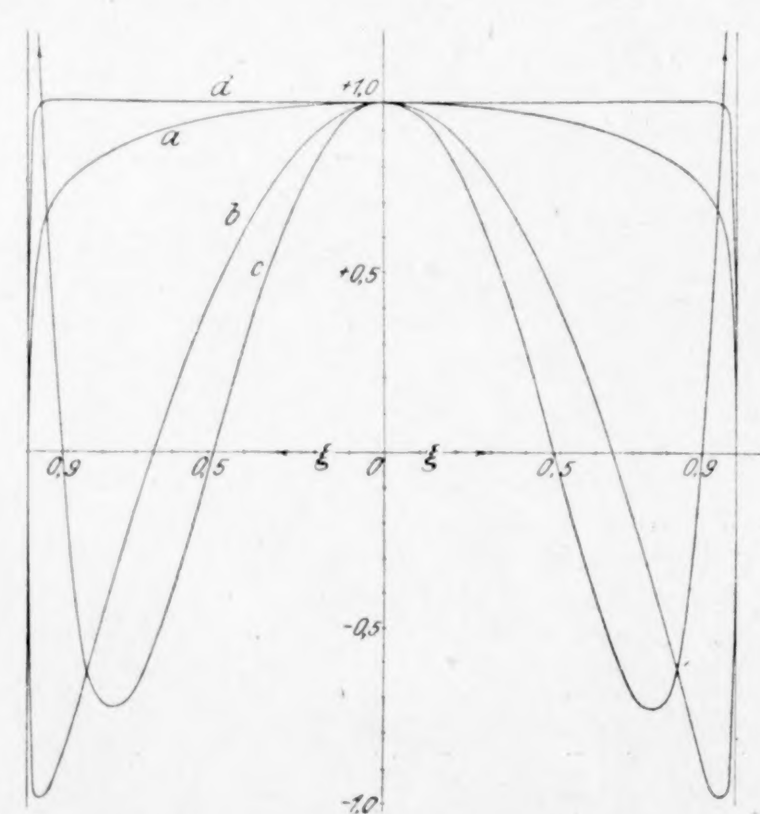


Abb. 1 B. Dieselben über y als Abscisse. d = Anfangsverteilung für $z = 0$.

gerechnet werden; insbesondere der dritte Eigenwert wird bei dem nur dreigliedrigen Ansatz nur in der Größenordnung stimmen. Wir werden aber gleich sehen, daß dies in unserem Resultat nur von geringem Einfluß ist.

Die besondere Eignung der Kugelfunktionen für das vorliegende Problem läßt sich auch noch durch die folgende anschaulichere Ueberlegung plausibel machen, die gleichzeitig auch etwaige Bedenken wegen des Anwachsens des zweiten Koeffizienten in der zweiten Eigenfunktion zerstreuen kann. Betrachtet man die Abb. 1, so sieht man, daß die Eigenfunktionen selbst große Aehnlichkeit mit den Kugelfunktionen zeigen. Entwickelt man nun ein Schema, wie es durch die Gleichungen (16) dargestellt wird, nach Funktionen, die mit den Eigenfunktionen identisch sind, so wird der Koeffizient, dessen Index mit der Ordnungszahl der Eigenfunktion gleich ist, gleich 1, alle anderen werden gleich 0. Die betreffende Eigenfunktion wird durch das eine Glied der Entwicklung bereits exakt dargestellt. Entwickeln wir nach Funktionen, die mit den Eigenfunktionen zwar nicht identisch sind, aber mit ihnen doch gewisse Aehnlichkeit haben, so wird in der Entwicklung der Koeffizient, dessen Index gleich der Ordnungszahl ist, überwiegen. Es ist klar, daß eine solche Entwicklung die darzustellende Funktion mit verhältnismäßig wenig Gliedern gut annähern wird.

Setzt man die Werte von ω nach (14a) in Gl. (11a) und (12a) ein, so erhält man für den Potenzexponenten

$$k_1 = 0{,}1510\,\frac{1}{d}\left(\frac{\nu}{v\,d}\right)^{1/4}, \qquad k_2 = 2{,}844\,\frac{1}{d}\left(\frac{\nu}{v\,d}\right)^{1/4}, \qquad k_3 = 29{,}42\,\frac{1}{d}\left(\frac{\nu}{v\,d}\right)^{1/4} \quad (17).$$

Die vollständige Lösung der partiellen Differentialgleichung (12) können wir nunmehr als Entwicklung nach Eigenfunktionen anschreiben,

$$\vartheta = a_1 g_I e^{-k_1 z} + a_2 g_{II} e^{-k_2 z} + a_3 g_{III} e^{-k_3 z} \quad \ldots\ldots \quad (18),$$

deren Koeffizienten so zu bestimmen sind, daß die vorgeschriebene Temperaturverteilung für $z = 0$ erfüllt wird. Wir wollen die Rechnung vorweg für den Fall gleichmäßiger Temperaturverteilung für den Anfangsquerschnitt durchführen. Wir haben daher $a_1 \ldots a_3$ zunächst so zu bestimmen, daß $\vartheta(y)$ für $z = 0$ sich möglichst wenig von $\vartheta = 1$ unterscheidet. Jede andere Temperatur folgt dann durch eine multiplikative Konstante. Das Minimum der Fehlerquadrate liefert die Werte:

$$a_1 = 1{,}129, \quad a_2 = -0{,}180, \quad a_3 = 0{,}048.$$

Wir erhalten so schließlich die Gleichung des Temperaturfeldes für turbulente Strömung in Röhren bei hydrodynamisch ausgebildetem Zustand, falls im Anfangsquerschnitt die gleichförmige Temperatur ϑ_0 herrscht:

$$\left.\begin{aligned}\vartheta = \vartheta_0 \Big\{ & 1{,}129\, e^{-0{,}151\left(\frac{\nu}{v d}\right)^{1/4}\frac{z}{d}} \left[0{,}9544\, x - 0{,}0212\, x^3 + 0{,}0668\, x^5\right] \\ & - 0{,}180\, e^{-2{,}844\left(\frac{\nu}{v d}\right)^{1/4}\frac{z}{d}} \left[-0{,}7472\, x - 4{,}275\, x^3 + 6{,}022\, x^5\right] \\ & + 0{,}048\, e^{-29{,}42\left(\frac{\nu}{v d}\right)^{1/4}\frac{z}{d}} \left[20{,}34\, x - 54{,}80\, x^3 + 35{,}47\, x^5\right] \Big\}\end{aligned}\right\} \quad (19),$$

wobei die gleichen Potenzen von x aus den P zusammengefaßt sind.

Man erkennt nun auch, daß ein gewisser Fehler im dritten Eigenwert und in der dritten Eigenfunktion von geringer Bedeutung ist; selbst wenn der dritte Potenzexponent noch etwas kleiner werden sollte, klingt die dritte Eigenfunktion nach wenigen Zentimetern vom Beginn der thermischen Einwirkung ab, auf den ganzen übrigen Teil des Rohres ist der Fehler ohne Einfluß. Immerhin kann jederzeit eine vierte Näherung gerechnet werden.

6. Diskussion des Ergebnisses und Vergleich mit Beobachtungen. An Hand der Abb. 1 können wir die Temperaturverteilung über den Querschnitt diskutieren. Für $z = 0$ haben wir rechteckige Verteilung angenommen, d. h. die Flüssigkeit soll mit einer über den ganzen Querschnitt gleichmäßigen Temperatur eintreten. In dem Intervall von $\frac{y}{r}$ zwischen 0,8 und 0 ist dies durch unsere Entwicklung mit einem maximalen Fehler von $\pm 2^1/_2$ pro Mille erfüllt. Von $\frac{y}{r} = 0{,}9$ bis 1 haben wir einen scharfen Temperaturabfall, da wir ja nur 3 Glieder berücksichtigen. Aehnliche Verhältnisse werden auch in Wirklichkeit vorliegen, da die wandnahen Schichten schon durch

Strahlung vor der unmittelbaren Berührung mit der Wand eine Temperaturänderung erleiden werden. Beim weiteren Fortschreiten längs des Rohres flacht sich das Temperaturgefälle an der Wand immer mehr ab; bis auch die zweite Eigenfunktion abgeklungen ist, ist die sogenannte »Endtemperaturverteilung« erreicht, die durch die erste Eigenfunktion allein dargestellt wird. Von da ab bleiben sich alle Querschnitte ähnlich, indem alle Temperaturen nach derselben Exponentialfunktion in der z-Richtung abnehmen; in diesem Sinne ist der Ausdruck Endtemperaturverteilung zu verstehen. Wie Gl. (16) zeigt, unterscheidet sich die erste Eigenfunktion und somit die Endtemperaturverteilung nur wenig von der Geschwindigkeitsverteilung im hydrodynamisch ausgebildeten Zustand.

Mit Hilfe des bekannten Temperaturfeldes sind wir jetzt in der Lage, alle Fragen über den Wärmeaustausch zu beantworten. Um z. B. die W.-Ue.-Zahl α zu berechnen, bilden wir das Verhältnis der von der Flächeneinheit der Wand übergehenden Wärmemenge zur Mitteltemperatur des Querschnittes, d. h.

$$\alpha = \frac{q_0}{\vartheta_m} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (20).$$

Nach Gl. (9) ist q_0 gegeben durch:

$$q_0 = \frac{0{,}176\, v^{3/4} C \nu^{1/4}}{r^{3/28}} \lim_{y=0} \left[\frac{\partial \vartheta}{\partial y} y^{6/7}\right],$$

während die Mitteltemperatur ϑ_m durch die Gleichung definiert ist:

$$\vartheta_m = \frac{1}{r^2 \pi} \int_0^r \vartheta(y)\, 2\pi y\, dy.$$

Wir erhalten demnach für α den Ausdruck:

$$\alpha = 0{,}0346\, v C \left(\frac{\nu}{v d}\right)^{1/4} \frac{1{,}078\, e^{-k_1 z} + 0{,}134\, e^{-k_2 z} + 0{,}980\, e^{-k_3 z}}{0{,}970\, e^{-k_1 z} + 0{,}024\, e^{-k_2 z} + 0{,}006\, e^{-k_3 z}} \quad \ldots \quad (21).$$

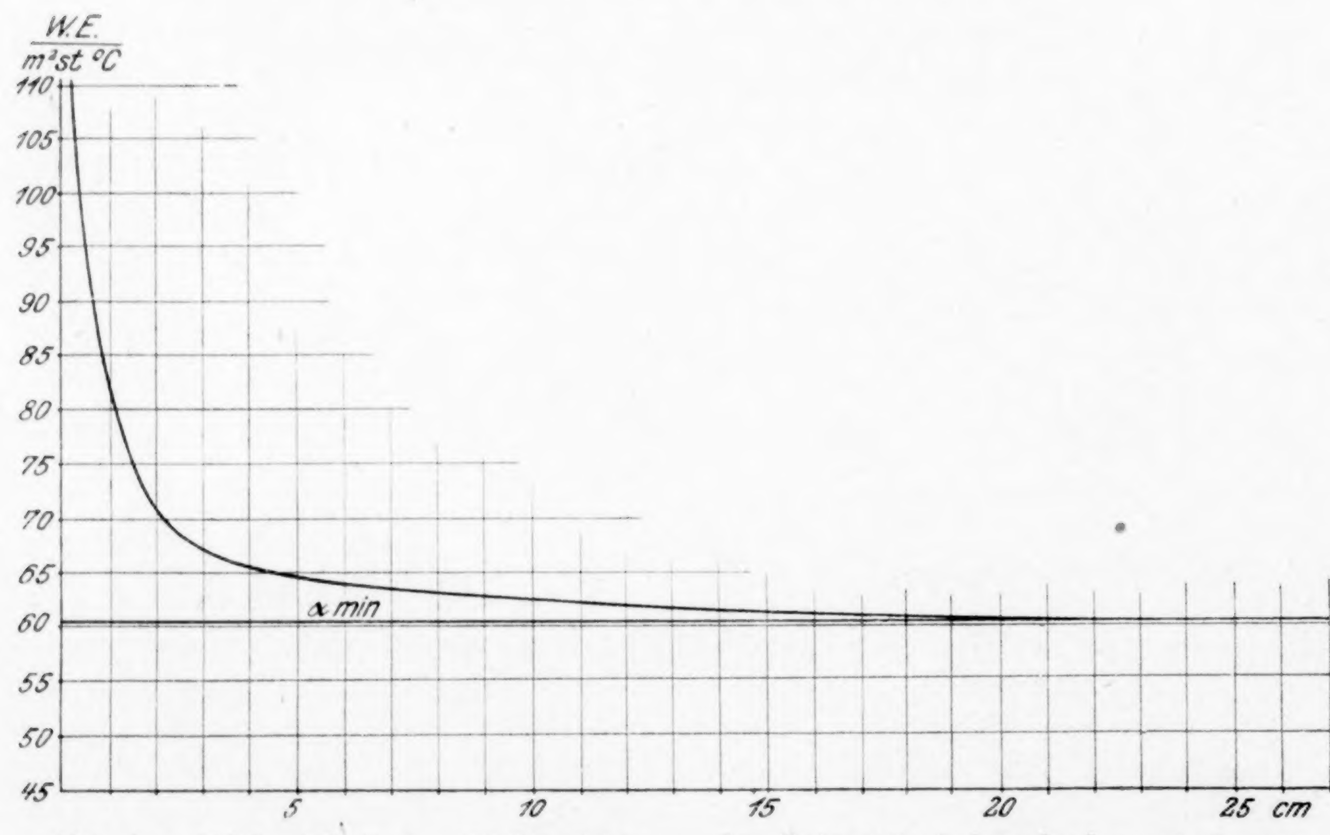


Abb. 2. Abhängigkeit der W.-Ue.-Zahl von der Rohrstelle bei hydrodynamisch ausgebildeter Strömung [$c = 0{,}304$ Cal/m³, $v = 18{,}3$ m/sec, $\nu = 0{,}175$ cm²/sec, $d = 2{,}2$ cm].

Das analoge Resultat für Laminarströmung hat Nusselt[1]) berechnet.

Die Abhängigkeit der W.-Ue.-Zahl α von der Rohrstelle ist aus Abb. 2 zu ersehen, die für den speziellen Wert $\frac{1}{d}\left(\frac{\nu}{v d}\right)^{1/4} = 0{,}037$ durchgerechnet ist. α ist für $z = 0$ unendlich, nimmt dann entsprechend der Verminderung des Temperaturabfalles an der Wand ab, und zwar bedeutend rascher als bei laminarer Strömung; es nähert sich

[1]) S. Fußn. 4, S. 268.

schließlich einem Minimalwert α_{min}. Während im laminaren Fall dieser Kleinstwert unabhängig von der Geschwindigkeit ist, geht bei turbulenter Strömung Gl. (21) in die Form über:

$$\alpha_{min} = 0{,}0384\, v\, C \left(\frac{\nu}{v\, d}\right)^{1/4} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (21\,a)$$

Gl. (21a) ist mit der von Reynolds entwickelten Formel analog. Da, wie wir bereits erwähnt haben, im turbulenten Strom die molare Wärmeübertragung die molekulare um ein Vielfaches überwiegt, so erscheint es vollkommen berechtigt, daß in der Formel für die W.-Ue.-Zahl nur diejenigen Größen auftreten, die für den Strömungszustand und damit für den molaren Wärmetransport maßgebend sind. Dies sind aber v, d und ν bezw. C. Die Temperaturabhängigkeit liegt in den Werten der Zähigkeitszahl ν. Berücksichtigt man für Gase die Relation $\frac{\lambda\varrho}{C\mu} \sim 1$, so sieht man, daß Gl. (21a) mit den Dimensionsformeln von Nusselt[1]) und Prandtl[1]) ebenfalls der Form nach übereinstimmt.

Das vorhandene Versuchsmaterial reicht leider für eine exakte Prüfung dieser Ergebnisse nicht aus, da bei den Messungen stets mittlere Uebergangszahlen gemessen werden, wobei »Anlaufstrecken« und Heizungsstrecken nicht so lang gewählt sind, daß man in der Meßstrecke mit Sicherheit einen hydrodynamisch ausgebildeten Zustand mit ähnlich bleibendem Temperaturprofil erreicht hätte. In den meisten Fällen kann sogar gar nicht festgestellt werden, von welchem Punkte die thermische Einwirkung beginnt. Dies ist offenbar ein Zeichen dafür, daß die Experimentatoren sich über den Einfluß der Anordnung auf das Meßergebnis vielleicht kein klares Bild gemacht haben.

Nur Nusselt hat in einer kurzen Versuchsreihe[2]) einmal ein 2 m langes Rohrstück vor die eigentliche Versuchsstrecke vorgeschaltet. Nach den Berechnungen, die wir im nächsten Abschnitt kennen lernen werden, war der Strömungszustand damit sicher ausgebildet. Da überdies sowohl diese Anlaufstrecke wie das geheizte Versuchsrohr aus Messing bestanden und fest metallisch miteinander verbunden waren, so war die vorgeschaltete Rohrstrecke gleichfalls, zumindest in dem an das Versuchsrohr anschließenden Teil, mitgeheizt. Außerdem lag die erste Temperaturmeßstelle im Durchschnitt noch etwa 15 cm vom Anfang der geheizten Versuchsstrecke ab, so daß wir nach den Ergebnissen der Gl. (21) mit Sicherheit annehmen können, daß die W.-Ue.-Zahl ihren Minimalwert erreicht hatte. Ich habe diese Versuche nach der Formel für α_{min} nachgerechnet. Die Ergebnisse sind in nachstehender Tafel enthalten (p = Luftdruck, γ = spez. Gewicht der Luft):

Versuchs-Nr.	ϑ_m	l	p_m	γ_m	v	α gemessen	α berechnet	Unterschied vH
95	39,0	0,6133	1,161	1,273	4,24	19,29	20,09	+ 4,14
96	37,8	0,6245	1,167	1,285	5,75	24,95	25,36	+ 1,64
97	34,2	0,6368	1,164	1,255	8,29	32,75	32,57	— 0.5
98	31,5	0,6438	1,163	1,307	13,06	46,8	47,44	+ 1,3
99	35,6	1,0590	1,164	1,291	21,06	65,3	67,51	+ 3,35
100	32,1	1,1300	1,167	1,309	24,05	73,0	75,25	+ 3,0

Versuch 95 mit der Reynoldsschen Zahl 6100 (etwa 3- bis 4fache kritische Geschwindigkeit) liegt hart an der Grenze des Gültigkeitsbereiches der oben entwickelten Theorie. In Anbetracht der Genauigkeitsgrenzen für derartige Messungen erscheint die Uebereinstimmung durchaus befriedigend.

In den nächsten Abschnitten wollen wir den Wärmeübergang in der Anlaufstrecke eines Rohres, d. h. bei hydrodynamisch unausgebildetem Zustand untersuchen: da für den Rohranfang eine Lösung für das Geschwindigkeitsfeld bisher nicht gegeben wurde, müssen wir dieses erst bestimmen.

7. Das Geschwindigkeitsfeld in der Anlaufstrecke. Um einen angenäherten Ausdruck für das Geschwindigkeitsfeld in der Anfangstrecke[3]) des Rohres bei turbulenter

[1]) a. a. O.

[2]) Forschungsarb. herausg. v. Ver. deutsch. Ing. H. 89, Zahlent. 6.

[3]) L. Schiller, der sich in neuester Zeit experimentell — eine theoretische Ergänzung ist gleichfalls angekündigt — mit dem Problem der Anlaufstrecke befaßt hat, behandelt nur den laminaren Fall. Vgl. z. B. Zeitschrift für Physik 3, 1920, 412.

Strömung zu gewinnen, wollen wir die von v. Kármán eingeführte Impulsbetrachtung [1]) anwenden.

Wir betrachten einen Längsschnitt durch den Rohranfang. Bei A soll die Flüssigkeit aus einem großen Behälter mit gleichmäßiger Geschwindigkeitsverteilung einströmen. Die wandnahen Schichten werden unter dem Einfluß der inneren Reibung verzögert werden und die Dicke der Schicht, in der die Schubspannung übertragen wird (in der Abbildung schraffiert gezeichnet) wird solange wachsen, bis die beiden »Grenzschichten«, wie wir sie kurz nennen wollen, zusammentreffen. Von da ab wird — unter Zwischenschaltung eines kurzen Uebergangsgebietes — die Geschwindigkeitsverteilung über den Querschnitt konstant bleiben.

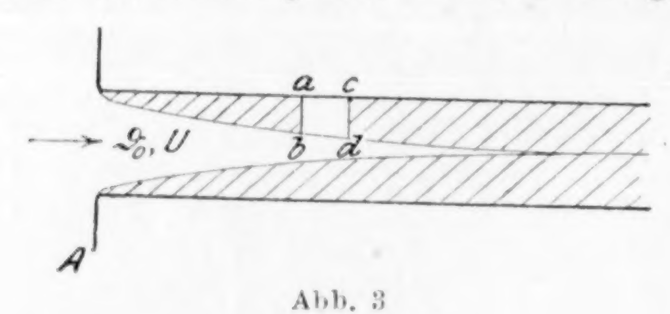


Abb. 3

Wir nehmen also an, daß es im Rohranfang ein Gebiet im Innern der strömenden Flüssigkeit gibt, in dem die Reibung vernachlässigt werden kann. Für diesen Bereich setzen wir die Gültigkeit der Eulerschen Gleichung voraus, wie sie für eine reibungslose Flüssigkeit aufgestellt wird.

Wir nehmen den stationären Vorgang und betrachten das Gleichgewicht eines Elementes der Grenzschicht, das ringförmige Gestalt hat; $abcd$ stellt in Abb. 3 einen Querschnitt dieses Elementes dar. Es bezeichne:

Q = das durch den Querschnitt in der Grenzschicht sekundlich strömende Volumen,
J = den sekundlichen Transport von Impuls der Stromrichtung durch die Querschnittsfläche,
U = Geschwindigkeit der ungestörten Strömung,
u = » in der Grenzschicht,
v = mittlere Geschwindigkeit über den Querschnitt,
δ = Dicke der Grenzschicht, τ_0 = Schubspannung an der Wand,
p = den Druck, z = Koordinate in der Stromrichtung,
y = Abstand von der Rohrwand.

Die Gleichgewichtsbedingung für das Element der Grenzschicht können wir dann folgendermaßen anschreiben:

$$\frac{dJ}{dz} - \varrho U \frac{dQ}{dz} = -\frac{dp}{dz}(2 r \delta - \delta^2)\pi - 2 r \pi \tau_0 \quad \ldots \ldots \quad (22).$$

Hierzu treten noch folgende Bedingungen: Infolge der Kontinuität muß durch alle Rohrquerschnitte dieselbe Flüssigkeitsmenge gehen. Wenn also die Schichten an der Wand verzögert werden, so muß die Geschwindigkeit der ungestörten Flüssigkeit (ungestört immer in dem Sinne, daß keine Schubspannung übertragen wird) zunehmen. Diese Zunahme an Geschwindigkeit wird dann nach der Bewegungsgleichung für ideale Flüssigkeit von einem Druckabfall begleitet. Dies liefert die weiteren Bedingungsgleichungen:

$$Q + U(r - \delta)^2 \pi = v r^2 \pi \quad \ldots \ldots \quad (23),$$

$$\frac{dp}{dz} + \varrho U \frac{dU}{dz} = 0 \quad \ldots \ldots \quad (24).$$

u setzen wir nach Gleichung (2a) in der Form an:

$$u = U \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/7} \left\{\alpha + \beta \left(\frac{y}{\delta}\right)\right\} \quad \ldots \ldots \quad (25)$$

und bestimmen die Koeffizienten α und β aus den Forderungen

$$u = 0 \qquad \text{für } y = 0$$

$$u = U, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \qquad \text{»} \quad y = \delta.$$

Dann ergibt sich

$$u = U \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/7} \left\{\frac{8}{7} - \frac{1}{7}\frac{y}{\delta}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (25\,a).$$

[1]) Dieses Heft S. 235 und 256.

τ_0 ergibt sich aus der Bedingung, daß für kleine Werte von y (25a) in Gleichung (2) übergehen muß, zu:

$$\tau_0 = \varrho \left(\frac{8}{7B}\right)^{7/4} U^{7/4} \left(\frac{\nu}{\delta}\right)^{1/4} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (26).$$

Berücksichtigen wir die aus Gleichung (23) folgende Beziehung zwischen der Geschwindigkeit der ungestörten Strömung U und der mittleren Geschwindigkeit v:

$$U = \frac{165\,v}{4\,\xi^2 - 22\,\xi + 165} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (27),$$

wobei $\frac{\delta}{r} = \xi$ gesetzt ist, so liefert die Gleichgewichtsbedingung eine gewöhnliche Differentialgleichung für ξ, in der sich die Variablen trennen lassen und man erhält:

$$\int_0^1 \frac{\left\{\frac{64}{345}\xi^3 - \frac{100}{69}\xi^2 - \frac{206}{207}\xi + \frac{616}{69}\right\}\xi^{1/4}}{[4\,\xi^2 - 22\,\xi + 165]^{5/4}}\, d\xi = \frac{1}{165^{1/4}} \left(\frac{8}{7B}\right)^{7/4} \frac{\nu^{1/4}}{v^{1/4}\, r^{5/4}}\, z \quad \ldots \quad (28).$$

Statt die Quadraturen numerisch auszuführen, wenden wir folgenden Rechnungsgang an.

Für kleine Werte von ξ kann man die höheren Potenzen in ξ vernachlässigen und erhält:

$$\xi \quad z^{4/5}.$$

Setzt man $z^{4/5} = t$, so muß sich ξ als Potenzreihe in t darstellen lassen. Man kann also schreiben:

$$\xi = At + Bt^2 + Ct^3 + \ldots\ldots$$

Schreibt man (28) in der Form

$$\frac{(1 + \alpha\,\xi + \beta\,\xi^2 + \gamma\,\xi^3)\,\xi^{1/4}}{[1 + p\,\xi + q\,\xi^2]^{5/4}}\, d\xi = K\,dz$$

und führt die obigen Ausdrücke ein, so fallen die gebrochenen Potenzen von t fort und man erhält, indem man alles nach Potenzen von t entwickelt und die Koeffizienten links und rechts vergleicht als Verlauf der Grenzschichten im Rohranfang, wenn man mit dem dritten Gliede abbricht:

$$\xi = \frac{\delta}{r} = 1{,}41 \left(\frac{\nu}{v\,d}\right)^{1/5} \left(\frac{z}{d}\right)^{4/5} - 0{,}048 \left(\frac{\nu}{v\,d}\right)^{2/5} \left(\frac{z}{d}\right)^{8/5} + 0{,}168 \left(\frac{\nu}{v\,d}\right)^{3/5} \left(\frac{z}{d}\right)^{12/5}. \quad (29).$$

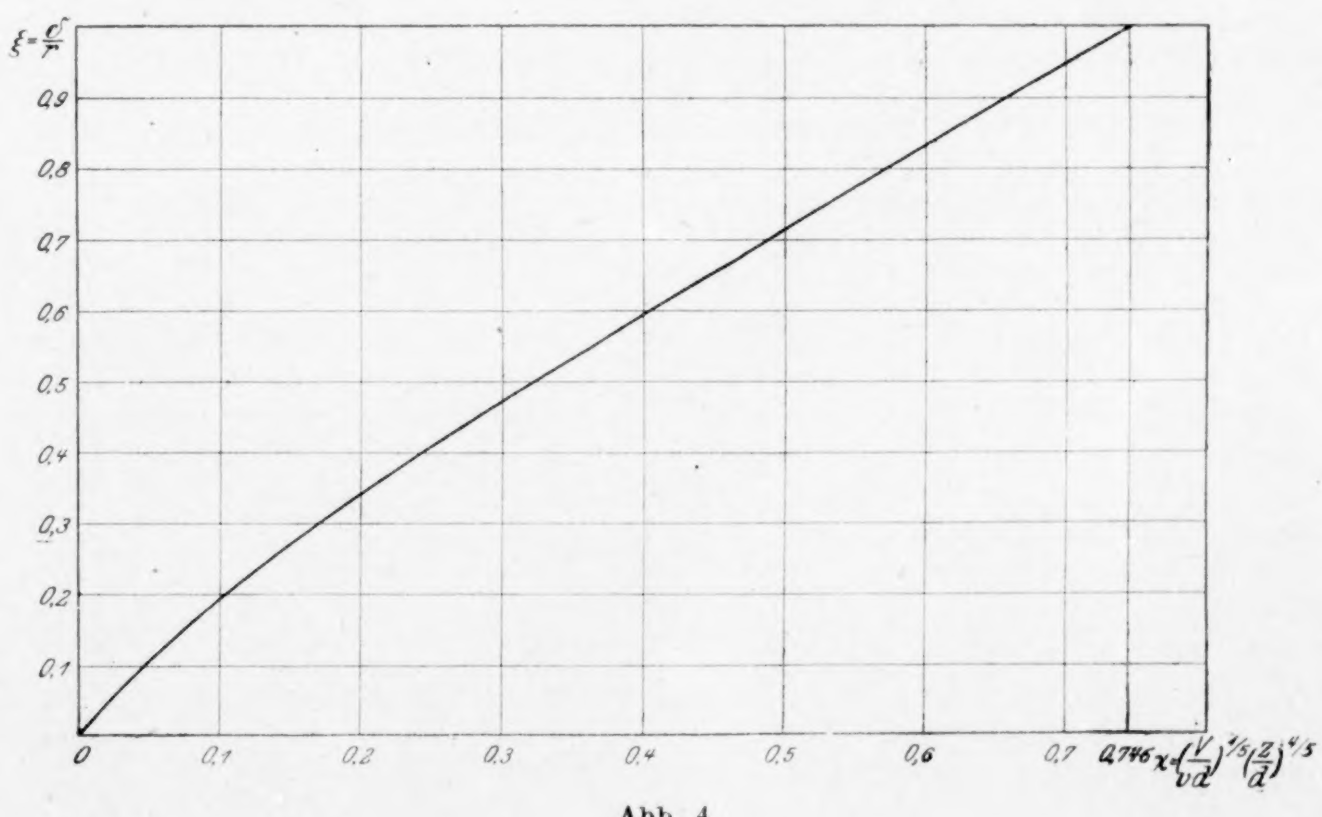


Abb. 4

ξ als Funktion von $\chi = \frac{\nu^{1/5}}{v^{1/5}\, d} z^{4/5}$ ist in Abb. 4 dargestellt. Für $\chi = 0{,}746$ wird $\xi = 1$; die Länge der Rohrstrecke bis zum Zusammenstoßen der Grenzschichten beträgt somit:

$$z_0 = 0{,}693\, d \left(\frac{v\, d}{\nu}\right)^{1/4} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (30).$$

Mit Gleichung (29) beherrschen wir das Feld der mittleren Geschwindigkeiten in der Anlaufstrecke und können alle Fragen, für welche die Kenntnis der Verteilung derselben genügt, beantworten. So erhalten wir z. B. den Rohrwiderstand zwischen zwei Querschnitten z_1 und z_2 der Anlaufstrecke, d. h. das Integral:

$$W = -2 r \pi \int_{z_1}^{z_2} \tau_0(z)\, d z,$$

indem wir die Differenz der Impulstransporte durch die Querschnitte z_1 und z_2, ferner die Druckdifferenz $\times$ Querschnittsfläche berechnen und die beiden Beträge addieren.

8. Der Wärmeübergang in der Anlaufstrecke. Zur Berechnung des Temperaturfeldes wenden wir eine ähnliche Betrachtung an, indem wir die Wärmebilanz für ein Element der Grenzschicht aufstellen. Es soll wiederum eine warme Flüssigkeit in ein Rohr mit unveränderlicher Wandtemperatur $\vartheta_w = 0$ einströmen. Wir machen nur die eine vereinfachende Annahme, daß dort, wo keine Schubspannung übertragen wird, auch kein Wärmetransport erfolgt, und vernachlässigen damit jenen geringen Betrag an Wärme, der an der inneren Begrenzung der Grenzschicht noch durch die gewöhnliche Wärmeleitung fortgeführt wird. An dieser Stelle ist jedoch der Temperaturgradient, da wir die Rechnung für überkritische Geschwindigkeit durchführen, so flach, daß der damit begangene Fehler ohne weiteres in Kauf genommen werden kann. Wir nehmen also an, daß im Gebiet, wo die ungestörte Flüssigkeit mit der Geschwindigkeit U strömt, die Temperatur konstant gleich der Eintrittstemperatur ϑ_0 sei. Die Wärmebilanz für das betrachtete Element lautet dann:

$$\frac{d}{d z} \int_{z}^{\delta} u\, C\, \vartheta\, 2 \pi (r - y)\, d y = C \vartheta_0 \frac{d Q}{d z} - 2 r \pi q_0 \quad \ldots \ldots (31).$$

Da wir bereits für den Fall der hydrodynamisch ausgebildeten Strömung gesehen haben, daß bei Turbulenz die Temperaturverteilung der Geschwindigkeitsverteilung sehr ähnlich ist, so setzen wir ϑ an:

$$\vartheta = \vartheta_0 \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/7} \left\{\alpha + \beta \frac{y}{\delta} + \gamma \left(\frac{y}{\delta}\right)^2\right\} \quad \ldots \ldots \ldots (32).$$

Entsprechend unseren obigen Annahmen gelten dann die Randbedingungen:

$$\vartheta = 0 \text{ für } y = 0$$

$$\vartheta = \vartheta_0, \frac{\partial \vartheta}{\partial y} = 0 \text{ für } y = \delta,$$

welche gestatten, die 3 Koeffizienten α, β, γ auf einen einzigen zurückzuführen. Wir erhalten so:

$$\vartheta = \vartheta_0 \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/7} \left\{\left(\frac{8}{7} - \frac{1}{7} \frac{y}{\delta}\right) + \gamma \left(1 - \frac{y}{\delta}\right)^2\right\} \quad \ldots \ldots (32\,b).$$

Der erste Term ist identisch mit der Gleichung für die Geschwindigkeitsverteilung, der zweite kann als eine Art Korrekturglied zur Gleichung der Geschwindigkeitsverteilung aufgefaßt werden. Dies läßt sich auch physikalisch leicht verstehen. Denn für $y = 0$ beginnen Temperatur- und Geschwindigkeitskurve mit derselben Potenz von y. Für $y = \delta$ haben beide horizontale Tangente. Die Kurven müssen somit im Zwischengebiet ähnlichen Charakter haben.

Für q_0 finden wir:

$$q_0 = \frac{1{,}340\, v^{3/4} \nu^{1/4} C \vartheta_0 \{8/7 + \gamma\}}{[4 \xi^2 - 22 \xi + 165]^{3/4} \xi^{1/4} d^{1/4}} \quad \ldots \ldots \ldots (32\,a).$$

Die Gleichung (31) wird nunmehr, da wir ja den Verlauf der Grenzschichtdicke δ kennen, eine gewöhnliche lineare Differentialgleichung erster Ordnung zur Bestimmung von γ liefern, die sich auf die Form bringen läßt:

$$\frac{d\gamma}{d z} + A(z) \gamma = B(z).$$

Die Funktionen A und B werden jedoch sehr unhandlich, so daß das allgemeine Integral dieser Differentialgleichung erster Ordnung, das bekanntlich lautet:

$$\gamma = K e^{-\int A\,dz} + e^{-\int A\,dz} \int B e^{\int A\,dz}\,dz,$$

eine sehr mühsame numerische Berechnung erfordern würde. Wir wählen daher eine graphische Methode und sind hier in der Lage, eine weit größere Genauigkeit zu erzielen, als der physikalischen Voraussetzung der Aufgabe entspricht. Wir führen $\frac{\delta}{r}$ gleich ξ als neue unabhängige Variable ein; dadurch wird die Gleichung wesentlich vereinfacht, die gebrochenen Potenzen von ξ fallen weg und man erhält nach einiger Rechnung:

$$\gamma = \frac{-0{,}1855\,\xi^3 + 1{,}477\,\xi^2 - 2{,}658\,\xi}{0{,}1623\,\xi^3 - 0{,}701\,\xi^2 - 23{,}05\,\xi + 45{,}4} - \frac{-0\,269\,\xi^4 + 2{,}390\,\xi^3 - 16{,}10\,\xi^2 + 37{,}59\,\xi}{0{,}1623\,\xi^3 - 0{,}701\,\xi^2 - 23{,}05\,\xi + 45{,}4}\,\gamma' \quad (33),$$

wobei $\gamma' = \frac{d\gamma}{d\xi}$ gesetzt ist.

In dieser Form ist die Gleichung (33) unmittelbar zur Berechnung des Richtungsfeldes der Differentialgleichung geeignet, das dann in Abb. 5a wiedergegeben ist. Der Punkt $\xi = 0$, $\gamma = 0$ ist ein Sattelpunkt; alle Lösungskurven kommen aus plus ∞ oder minus ∞, bis auf eine einzige, die in den Punkt 0,0 hineinführt. Da γ für $\xi = 0$ jedenfalls endlich sein muß, so gewinnen wir so die Anfangsbedingung

$$\gamma = 0 \text{ für } \xi = 0.$$

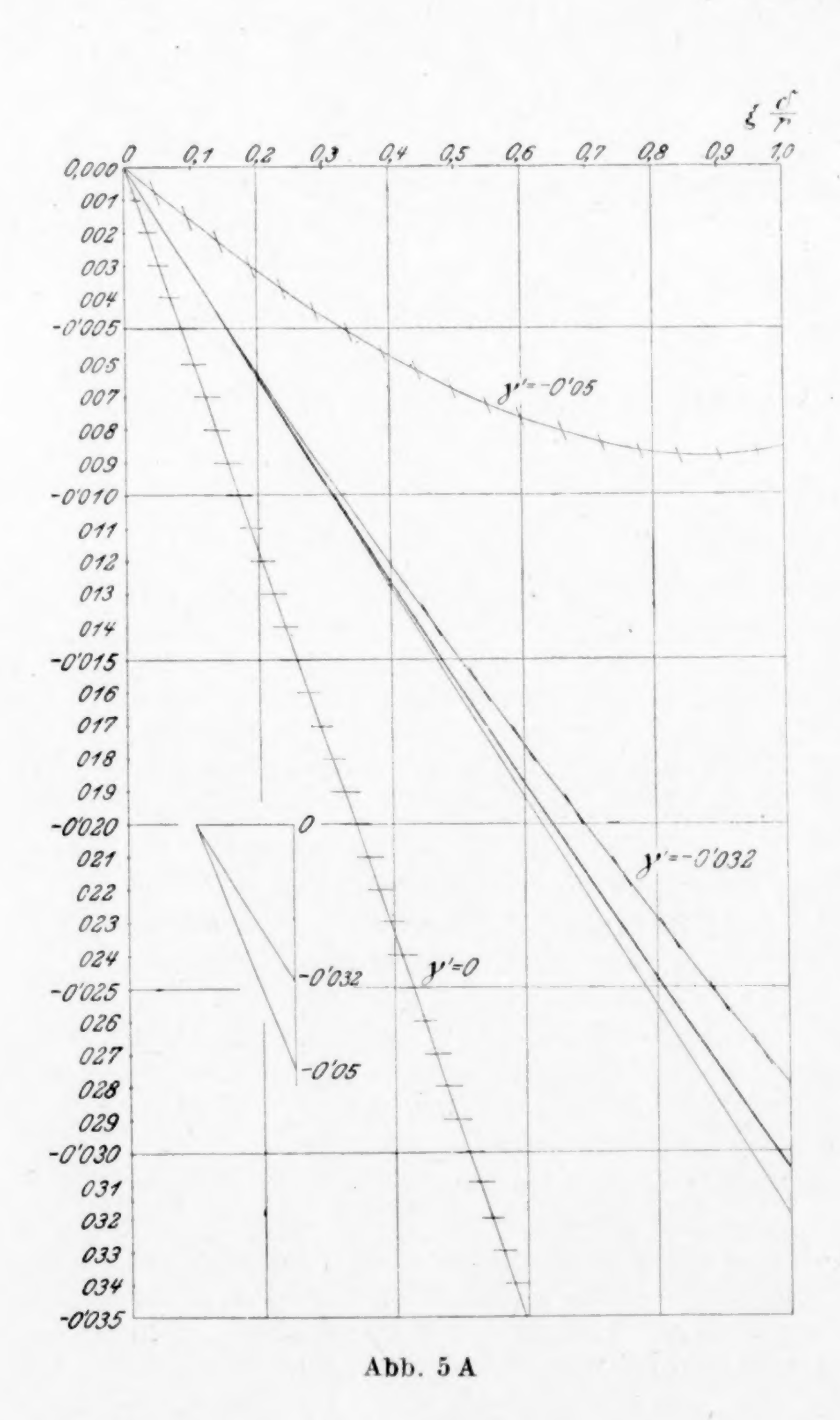


Abb. 5 A

Abb 5 B

Dies läßt sich auch physikalisch leicht verstehen. Der unmittelbare Rohranfang kann sich, solange $\delta \leqq r$ ist, weder in hydrodynamischer noch thermischer Beziehung von dem Verhalten einer Platte in freier Strömung unterscheiden. Wir werden aber später sehen, daß Geschwindigkeits- und Temperaturfeld im Falle der Platte gleich sind. Demnach muß im Rohranfang für $z = 0$ die Temperaturverteilung in die Geschwindigkeitsverteilung übergehen.

Lösen wir (33) nach γ' auf und betrachten den Grenzwert, dem γ' für $\xi = 0$ zustrebt, so finden wir:

$$\lim_{\xi=0} \gamma' = -0{,}032.$$

Sämtliche Isoklinen entspringen im Punkt 0,0; die Isokline für $\gamma' = 0{,}032$ läuft mit der ihr zugeordneten Neigung in diesen Punkt ein, im übrigen ist sie ganz schwach gegen die Abszissenachse konkav. Die Isoklinen stärkerer Neigung liegen gänzlich oberhalb von ihr, die schwächerer Neigung unterhalb. Aus diesem Verhalten folgt, daß die gesuchte Lösungskurve in ihrem ganzen Verlauf in dem schmalen Streifen zwischen der Isokline $\gamma' = -0{,}032$ und der Tangente an diese im Nullpunkte liegen muß. Die Gerade $\gamma = -0{,}032\,\xi$ wird somit eine erste Näherung mit einem maximalen Fehler von $12^1/_2$ vH darstellen.

Um eine zweite Näherung zu erhalten, setzen wir $\gamma = -0{,}032\,\xi + h(\xi)$ und führen diesen Ausdruck in (33) ein, die dann in eine Differentialgleichung für h übergeht, deren Isoklinenschar in Abb. 5b gezeichnet ist. Um die Genauigkeit zu steigern, ist 1000 facher Ordinatenmaßstab gewählt.

Die Lösung beginnt naturgemäß mit $h = 0$ für $\xi = 0$.

Setzen wir $e = 1000\,h$, so kann diese Größe, wie man sich durch Auftragen in logarithmischem Maßstab leicht überzeugt, durch die Formel $e = 1{,}48\,\xi^{1,865}$ wiedergegeben werden, so daß wir schließlich für γ den Ausdruck erhalten:

$$\gamma = -0{,}032\,\xi + 0{,}00148\,\xi^{1,865} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (34).$$

Diese Funktion ist durch die stark ausgezogene Linie in Abb. 5a wiedergegeben.

Damit haben wir auch für den Bereich des hydrodynamisch unausgebildeten Zustandes das Temperaturfeld aufgestellt. Wir schreiben für ϑ:

$$\vartheta = \vartheta_0 \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/7} \left\{\frac{8}{7} - \frac{1}{7}\frac{y}{\delta} - \left(1 - \frac{y}{\delta}\right)^2 [0{,}00148\,\xi^{1,865} - 0{,}032\,\xi]\right\} \quad . \quad . \quad (35).$$

Die Werte von δ bezw. ξ sind aus Gl. (29) oder aus Abb. 4 zu entnehmen. Für $\xi = 1$ wird ϑ gleich

$$\vartheta = \vartheta_0 \left(\frac{y}{r}\right)^{1/7} \left\{1{,}112 - 0{,}0819\,\frac{y}{r} - 0{,}0305\left(\frac{y}{r}\right)^2\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (35\,\mathrm{a}),$$

d. h., die Endverteilung der Temperatur bei hydrodynamisch ausgebildetem Zustand ist noch nicht ganz erreicht (Abb. 6), was wohl auch zu erwarten war.

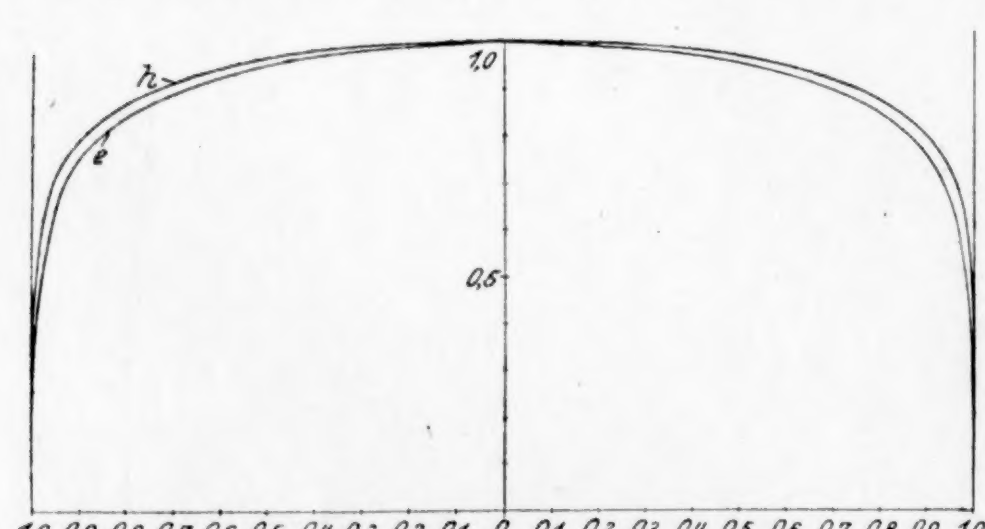


Abb. 6. Endtemperaturverteilung bei hydrodynamisch ausgebildetem Zustand (e) und Verteilung im Endquerschnitt der Anlaufstrecke (h).

Um den weiteren Anschluß zu bekommen, bestimmen wir jene Lösung der Differentialgleichung für das Temperaturfeld bei hydrodynamisch ausgebildetem Zustand, die der Anfangsbedingung (35a) genügt. Zu diesem Zwecke haben wir die durch Gl. (35a) dargestellte Funktion nach den Eigenfunktionen (16) zu entwickeln. Da sich die Temperaturverteilung der Gl. (35a) nicht sehr von der ersten Eigenfunktion, Gl. (16), unterscheidet, so setzen wir die Entwicklung mit nur zwei Gliedern an.

Die Entwicklung kann die Funktion (35a) naturgemäß nicht vollkommen exakt darstellen, schon deshalb, weil wir die Geschwindigkeitsverteilung das eine Mal mit der Einflußzahl, das andere Mal mit einer Potenzreihenentwicklung angesetzt haben. Um aber einen möglichst guten Uebergang von der einen Lösung zur anderen zu erzielen,

können wir es so einrichten, daß die beiden Temperaturkurven gerade in den uns wichtigen Eigenschaften völlig übereinstimmen.

Der Wärmeübergang ist durch die Vorgänge an der Wand bedingt; wir werden demnach

1. festsetzen, daß beide Kurven mit demselben ersten Entwicklungsglied an der Rohrwand beginnen und
2. die Energieströme durch den Gesamtquerschnitt gleichsetzen.

Dies liefert zwei Bedingungsgleichungen zur Bestimmung der beiden Koeffizienten der Entwicklung.

Man erhält so als Fortsetzung für das Temperaturfeld im hydrodynamisch ausgebildeten Bereich

$$\vartheta = \vartheta_0 \{1{,}016\, e^{-k_1 z} [0{,}9544\, x - 0{,}0212\, x^3 + 0{,}0668\, x^5] - 0{,}051\, e^{-k_2 z} [-0{,}7472\, x - 4{,}275\, x^3 + 6{,}022\, x^5]\} \quad (36).$$

Die Kenntnis des Temperaturfeldes soll zunächst wieder zur Berechnung der W.-Ue.-Zahl benutzt werden. Wir berücksichtigen zunächst die Anlaufstrecke.

q_0 haben wir in Gl. (3 b) bereits ausgedrückt. Die Mitteltemperatur des Querschnittes folgt zu:

$$\vartheta_m = \frac{1}{r^2 \pi} \left\{ \int_0^{\delta} \vartheta\, 2\pi (r - y)\, dy + \vartheta_0 \int_{\delta}^{r} 2\pi (r - y)\, dy \right\}.$$

Es ergibt sich somit für α_u der Ausdruck ($\alpha_u = \alpha$ im hydr. unausgeb. Bereich):

$$\alpha_u = 1{,}340\, v C \left(\frac{\nu}{v d}\right)^{1/4} \times \frac{1{,}143 - 0{,}032\, \xi + 0{,}00148\, \xi^{1{,}865}}{(4\xi^2 - 22\xi + 165)^{3/4}\, \xi^{1/4} \{1 - 0{,}133\, \xi + 0{,}024\, \xi^2 + (0{,}00148\, \xi^{1{,}865} - 0{,}032\, \xi)(0{,}520\, \xi - 0{,}1434\, \xi^2)\}} \quad (37\,a).$$

Die Forsetzung im zweiten Bereich lautet ($\alpha_a = \alpha$ im hydr. ausgeb. Bereich)

$$\alpha_a = 0{,}03461\, v C \left(\frac{\nu}{v d}\right)^{1/4} \frac{0{,}969\, e^{-k_1 z} + 0{,}038\, e^{-k_2 z}}{0{,}873\, e^{-k_1 z} + 0{,}0068\, e^{-k_2 z}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (37\,b).$$

Die Abhängigkeit der W.-Ue.-Zahl von der Rohrstelle in der Anlaufstrecke ist in der Abb. 7a wiedergegeben. Schreibt man (37 a) in der Form

$$\alpha_u = K v C \left(\frac{\nu}{v d}\right)^{1/4}_{\text{WE/Std. m}^2\,{}^0\text{C}},$$

so ist als Ordinate der Faktor K, der eine reine Funkion von ξ ist, über ξ als Abszisse aufgetragen. Damit umfaßt Abb. 7 A in Verbindung mit Abb. 4, der die jeweiligen Werte

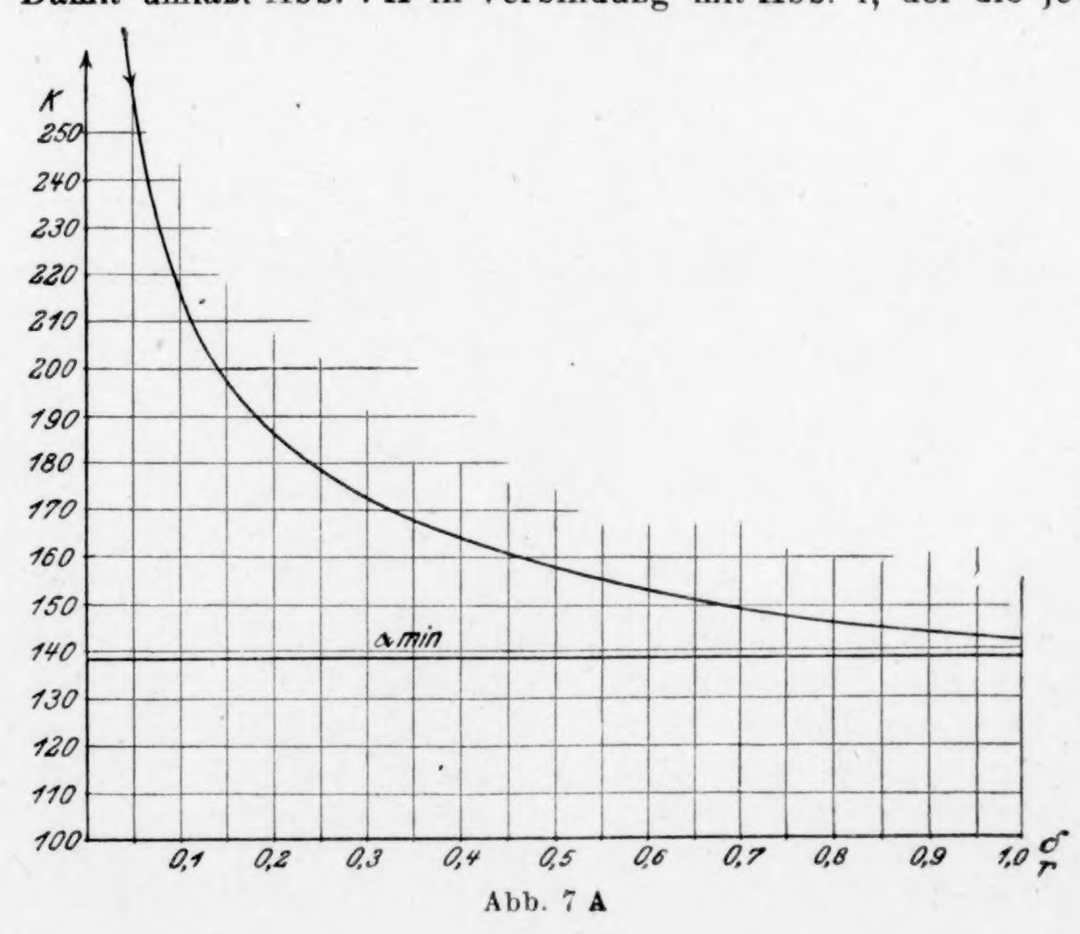


Abb. 7 A

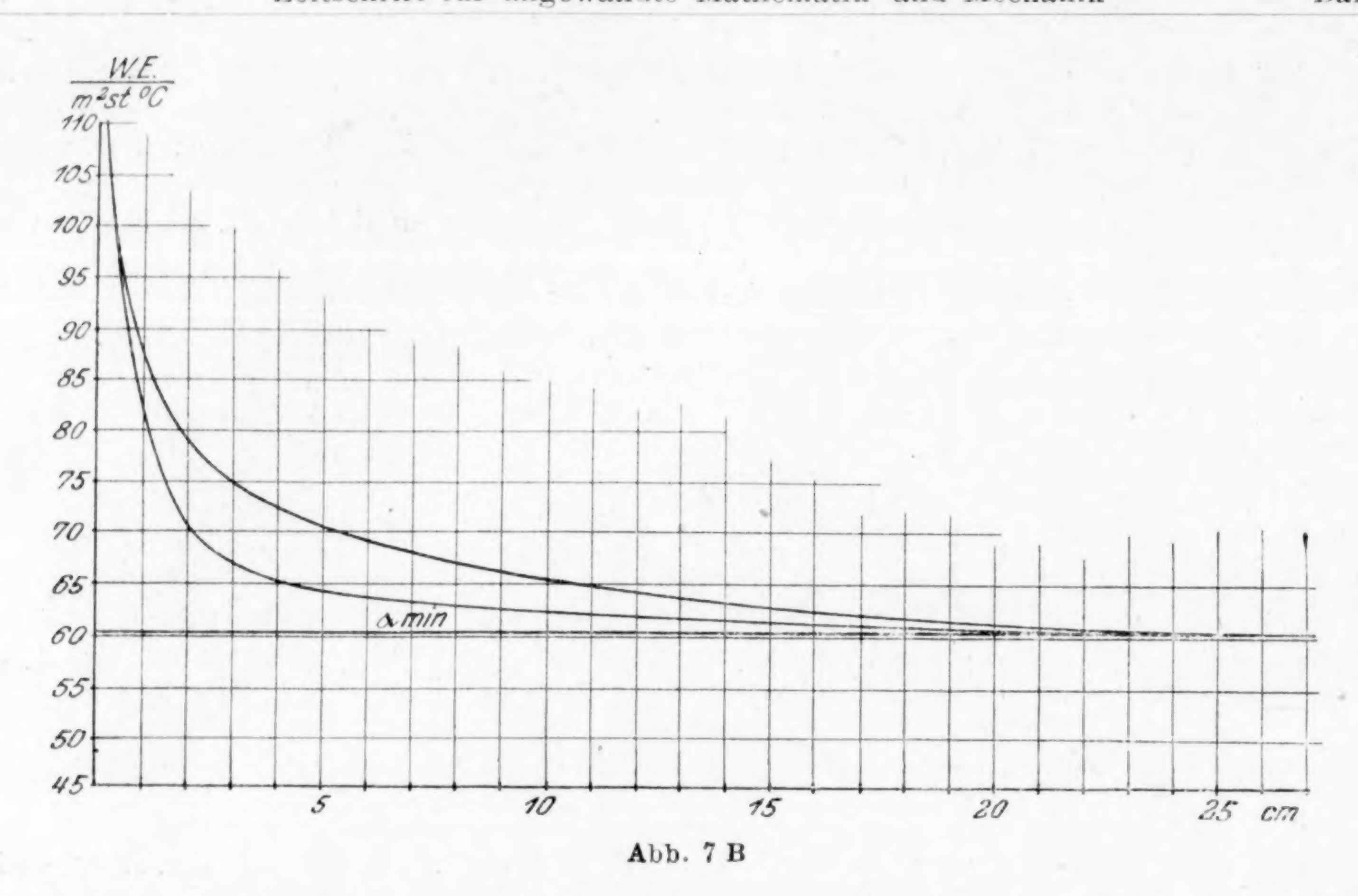


Abb. 7 B

von ξ entnommen werden können, alle möglichen Fälle. In Abb. 7B ist die Abhängigkeit für einen bestimmten Fall nochmals mit dem Abszissenmaßstab z im Vergleich mit demselben Fall bei hydrodynamisch ausgebildeter Strömung eingezeichnet. Man sieht, daß der Abfall von α in dem ersten Falle wesentlich weniger rasch erfolgt.

9. Zusammenfassung und Vergleich mit Beobachtungen. Nunmehr sind wir in der Lage, den Wärmeübergang im Rohr in allen Einzelheiten zu überblicken. Wir wollen die Ergebnisse kurz zusammenfassen:

Für den Wärmeübergang sind entsprechend der Gestalt des Geschwindigkeits- und Temperaturfeldes folgende Fälle zu unterscheiden, in denen der Wärmeübergang verschiedenen Gesetzmäßigkeiten gehorcht.

1. Hydrodynamisch und thermisch ausgebildeter Zustand. Dieser ist erreicht, wenn die Flüssigkeit bereits ein entsprechendes Stück der Rohrstrecke durchlaufen hat. Die W.-Ue.-Zahl ist konstant und durch Gl. (21a) gegeben.

2. Hydrodynamisch ausgebildete Strömung, thermischer Anfangszustand. Realisierung durch eine vorgeschaltete Anlaufstrecke, die durch entsprechende Heizung auf der ursprünglichen Flüssigkeitstemperatur gehalten wird. Die W.-Ue.-Zahl ist von der Stelle im Rohr abhängig, fällt von einem Höchstwert sehr rasch ab und nähert sich asymptotisch ihrem konstanten Minimalwert, Gl. 21.

3. Der hydrodynamische Anfang, d. h. die Einströmung der Flüssigkeit in das Rohr, fällt mit dem Beginn der thermischen Einwirkung zusammen. Die W.-Ue.-Zahl ist gleichfalls von der Stelle im Rohr abhängig, fällt jedoch langsamer auf ihren Minimalwert ab. Die W.-Ue-Zahl wird durch Gl. (37a, b) dargestellt.

4. Der Beginn der thermischen Einwirkung fällt irgendwo mitten in die Anlaufstrecke.

Für diesen letzteren Fall erhalten wir eine gute Näherung für die W.-Ue.-Zahl α, indem wir die Kurven, welche die Abhängigkeit von α von der Rohrstelle für Fall 2 und 3 darstellen, in dasselbe Koordinatensystem einzeichnen, den Nullpunkt des Abszissenmaßstabes füs α_a (hydrodyn. ausgebild. Str.) jedoch um die Strecke l verschieben, um welche der Beginn der thermischen Einwirkung von der Einströmöffnung abliegt. Die Kurve für α_a wird, da sie steiler abfällt, die Kurve α_u schneiden; die Einhüllende stellt in erster Annäherung die α-Verteilung für diesen speziellen Fall dar.

Die großen Differenzen in den Ergebnissen der einzelnen experimentellen Arbeiten sind nunmehr ohne weiteres verständlich. Während Nusselt diese am Schlusse seiner Arbeit über den Wärmeübergang bei laminarer Strömung ausschließlich auf den oben unter Punkt 2 angeführten Umstand zurückführt, sehen wir jetzt eine Reihe von Faktoren, die in wechselseitiger Kombination den Vorgang beeinflussen.

Die beiden sorgfältigsten Untersuchungen, die wir kennen, diejenigen von Nusselt[1]) und Jordan[2]), haben rechtwinklige Zuströmung der Gase in die Meßstrecke angewendet. Im Anfang derselben bestand daher bestimmt kein hydrodynamisch ausgebildeter Zustand. Wir haben es offenbar mit Fall 4 zu tun. Zahlenmäßige Angaben lassen sich jedoch heute nicht mehr darüber machen. Sowohl der Beginn der thermischen Einwirkung wie selbst die genaue Lage der ersten Temperaturmeßstelle sind nicht mehr genau festzustellen[3]). Eine exakte Auswertung der Versuchsergebnisse auf Grund der obigen Theorie ist daher für diese Versuche nicht möglich. Ich habe trotzdem eine Reihe von Versuchen von Nusselt daraufhin untersucht, wie weit die gemessenen W.-Ue.-Zahlen über dem Minimal α liegen. Die Ergebnisse sind in Zahlentafel 2 zusammengestellt. Berücksichtigt man die Abmessungen der Nusseltschen Apparatur, so sieht man, daß diese Zahlen sich durchaus mit dem decken, was nach den oben entwickelten Ergebnissen zu erwarten ist.

Zahlentafel 2.

Versuch Nr.	l	p_m	ϑ_m	γ_m	v	α gem.	α_{min}	Unterschied vH
7	0,5906	1,153	43,7	1,245	8,52	35,7	33,43	6,4
10	0,5983	1,152	35,3	1,278	18,33	65,5	60,4	8,4
13	0,5880	1,171	31,6	1,315	27,2	91,7	82,6	11,0
19	0,7870	2,050	69,0	2,050	8,94	57,3	50,9	12,5
24	0,6022	1,883	30,4	2,122	29,94	146,6	127,2	15,3
30	0,6178	3,96	31,9	4,45	10,87	124,8	103,8	20,0
41	0,5988	6,97	29,2	7,91	9,27	162,9	141,6	15,1
54	0,5863	9,98	26,0	11,41	10,04	233,0	198,0	17,7

Werten wir z. B. Versuch 10 unter der Annahme aus, daß wir es mit dem Fall 3 zu tun haben, der den Versuchsbedingungen jedenfalls nahe kommt, so bekommen wir einen Wert für α, der 10,2 vH über dem α_{min} liegt. In Wirklichkeit war die hydrodynamische Bedingung gleichmäßiger Geschwindigkeitsverteilung bei der ersten Temperatur-Meßstelle nicht vollständig erfüllt, so daß der α-Wert etwas niedriger ausfallen muß; der gemessene Wert liegt 8,4 vH über α_{min}.

Nach Formel (29) ist die Länge der Anlaufstrecke proportional $\sqrt[4]{v\varrho}$, mit zunehmender Geschwindigkeit und Dichte muß demnach der Anteil der Anlaufstrecke an der gesamten Länge der Meßstrecke wachsen und demgemäß müssen auch die Werte von α etwas zunehmen. Dies zeigen deutlich die Versuche 7, 10, 13, bei denen unter befriedigender Konstanthaltung der anderen Parameter die Geschwindigkeit variiert, sowie die Versuche 7, 19, 41, 54, in denen der Wert von ϱ bis zum Verhältnis 1 : 10 verändert wurde.

10. Die praktische Berechnung der übergehenden Wärmemenge. Anschließend wollen wir noch die Frage der praktischen Berechnung des Wärmeüberganges in Rohren besprechen. Zufolge der Tatsache, daß wir zwei verschiedene Lösungen für das Temperaturfeld bekommen haben, je nachdem ob der hydrodynamische Zustand ausgebildet ist oder nicht, muß man auch bei der Berechnung der auf einer bestimmten Rohrstrecke übergehenden Wärmemenge unterscheiden, in welchem Bereich man sich befindet. Wir wollen jedoch einige allgemeine Bemerkungen, die für beide Bereiche gelten, vorausschicken.

Die zwischen zwei Querschnitten im Abstande $l = z_1 - z_2$ übergehende Wärme kann immer auf zwei Arten gefunden werden:

1. Man bezieht die Rechnung auf das durch den Querschnitt in der Zeiteinheit hindurchtretende Flüssigkeitsvolumen. Da wir Geschwindigkeits- und Temperaturverteilung kennen, so können wir den Wärmestrom, der pro Zeiteinheit durch die Querschnittsfläche

[1]) S. Fußn. 4, S. 268.

[2]) H. P. Jordan, On the rate of heat transmission between fluids and metal surfaces. Proc. Inst. of Mech. Eng. 1909, Parts 3 bis 4.

[3]) Diese Angaben stützen sich auf eine Zuschrift, die Hr. Prof. Nusselt mir freundlichst übermittelt hat.

geht, durch eine Quadratur angeben. Die auf einer Wandstrecke von der Länge l zwischen z_1 und z_2 übergehende Wärme ist somit durch die Differenz der beiden Integrale:

$$Q = C\int_f u(y, z_1)\vartheta(y, z_1)df - C\int_f u(y, z_2)\vartheta(y, z_2)df \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (38)$$

gegeben. df ist das Flächenelement im Querschnitt, bei dessen Bildung nur zuachten ist, von wo y gezählt ist.

2. Man betrachtet nur den Vorgang an der Wand. Zu diesem Zweck haben wir die Gleichungen für q_0 aufgestellt. Die übergehende Wärmemenge schreibt sich dann mit den obigen Bezeichnungen:

$$Q = 2r\pi\int_{z_1}^{z_2} q_0(z)dz \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (39),$$

für ϑ_c in q_0 ist die Differenz der Wandtemperatur von der Temperatur in der Rohrachse im Querschnitt z_1 einzusetzen.

Die Ausdrücke für q_0 sind aber ziemlich unhandlich, so daß man meist die Gleichung (38) vorziehen wird. Als Beispiel wollen wir Gl. (38) für die praktisch wichtigsten Fälle ausführen.

1a. Der Wärmeübergang auf der ganzen Anlaufstrecke ist, da im Anfangsquerschnitt sowohl gleichmäßige Temperatur als Geschwindigkeitsverteilung herrscht, gleich:

$$Q = 0{,}115\, r^2\pi v C\vartheta_c \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (40).$$

Der Wert ist konstant, da ja die Temperatur- und Geschwindsgkeitsverteilung für Anfangs- und Endquerschnitt festliegen. Die speziellen Fälle unterscheiden sich durch die Länge der Rohrstrecke von der Einströmöffnung bis zur Ausbildung des hydrodynamischen Endzustandes.

1b. Betrachten wir eine Rohrstrecke von der Einströmung bis zu einem Querschnitt im Abstande L und sei l die Länge der Anlaufstrecke, dann ist (unter Benutzung von Gl. (36)) die gesamte auf der Länge L übergehende Wärme gleich

$$Q = r^2\pi v C\vartheta_0\{1 - 0{,}886\, e^{-k_1 l_1} - 0{,}0037\, e^{-k_2 l_1}\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (40\text{a}),$$

wobei $l_1 = L - l$ gesetzt ist.

2) Im hydrodynamisch ausgebildeten Zustand beträgt die vom Beginn der thermischen Einwirkung $(z = 0)$ bis zu einem Querschnitt z im Abstande l davon übergehende Wärmemenge:

$$Q = r^2\pi v C\vartheta_0\{1 - 0{,}985\, e^{-k_1 l} - 0{,}013\, e^{-k_2 l} - 0{,}0022\, e^{-k_3 l}\} \quad . \quad . \quad . \quad (41).$$

11. Abschätzung der Eigenerwärmung der Flüssigkeit durch die Reibung.

In unseren bisherigen Ausführungen haben wir die Wärmeerzeugung im Flüssigkeitsinnern durch die Vorgänge der Reibung durchwegs außer acht gelassen. Eine genaue Berücksichtigung derselben ist uns auch nicht möglich, solange wir die zusätzlichen Pulsationsgeschwindigkeiten nicht im einzelnen kennen, insbesondere genügt hierfür die Kenntnis der Verteilung der (zeitlich) mittleren Geschwindigkeit nicht, da die Dissipationsfunktion die Pulsationsgeschwindigkeit in quadratischen Termen enthält. Wir wollen dennoch versuchen, uns durch eine Näherungsbetrachtung darüber Rechenschaft zu geben, in welchen Geschwindigkeitsbereichen die oben erwähnte Vernachlässigung gestattet ist. Wir beschränken uns dabei auf die Vorgänge bei hydrodynamisch und thermisch **ausgebildetem** Zustand, d. h. die W.-Ue.-Zahl soll von der Rohrstelle unabhängig sein.

Wir nehmen beispielsweise an, daß eine kalte Flüssigkeit durch ein geheiztes Rohr fließt und betrachten wieder ein Volumelement, das durch das Rohr und zwei Querschnitte im Abstande dz begrenzt ist. Die konstante Wandtemperatur sei ϑ_w, die Mitteltemperatur des Querschnittes an der Stelle z $\vartheta(z)$, die Differenz von Wand- und Mitteltemperatur im Anfangsquerschnitt werde mit ϑ_0 bezeichnet. Alsdann lautet die Wärmebilanz für das Element:

$$r^2\pi v C d\vartheta = \alpha(\vartheta_w - \vartheta)2r\pi dz + T\zeta v^3 2r\pi dz \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (42),$$

wobei T das thermische Arbeitsäquivalent, ζ den auf das Quadrat der Geschwindigkeit bezogenen Koeffizienten des Reibungswiderstandes bedeuten soll. Wir schreiben (42) in der Form:

$$\frac{d\vartheta}{dz} + \frac{2\alpha}{rvC}\vartheta = \frac{2\alpha}{rvC}\left(\vartheta_w + T\frac{\zeta}{\alpha}v^3\right).$$

Das Glied $T\frac{\zeta}{\alpha}v^3$ hat die Dimension einer Temperatur. Wir wollen $T\frac{\zeta}{\alpha}v^3$ die Reibungstemperatur nennen und mit ϑ_R bezeichnen.

Beachtet man die Anfangsbedingung für $z = 0$, so lautet die Lösung der Diff.-Gl. (42):

$$\vartheta(z) = (\vartheta_w + \vartheta_R) - e^{-\frac{2\alpha}{r v C}z}[\vartheta_0 + \vartheta_R] \quad \ldots\ldots \quad (43).$$

Die Temperatur der Flüssigkeit ist also proportional der Wandtemperatur vermehrt um die Reibungstemperatur.

Tragen wir diese Beziehung in ein Koordinatensystem mit ϑ als Ordinate und z als Abszisse ein, so gelangen wir zu dem anschaulichen Ergebnis der Abb. 8, die für den Fall strömender Luft bei

$v = 200$ m/s, $r = 0{,}025$ m, $p = 1$ at,
$C = 0{,}282$ WE/m³, $\nu = 0{,}175$ cm²/s

gezeichnet ist.

Die Flüssigkeitstemperatur nähert sich asymptotisch einer Grenze, die um die Reibungstemperatur höher liegt als die Wandtemperatur. Da die übergegangene Wärmemenge der (in der Abb. schraffierten) Fläche zwischen der Geraden $\vartheta_w =$ konst. und der Kurve der Flüssigkeitstemperatur proportional ist, so sieht man, daß zwischen der Länge der Rohrstrecke und der Strömungsgeschwindigkeit eine Beziehung besteht, derart, daß zu einer vorgegebenen Länge eine bestimmte Geschwindigkeit und zu einer vorgegebenen Geschwindigkeit eine bestimmte Rohrlänge existiert, bei der das Maximum an Wärme übergeht.

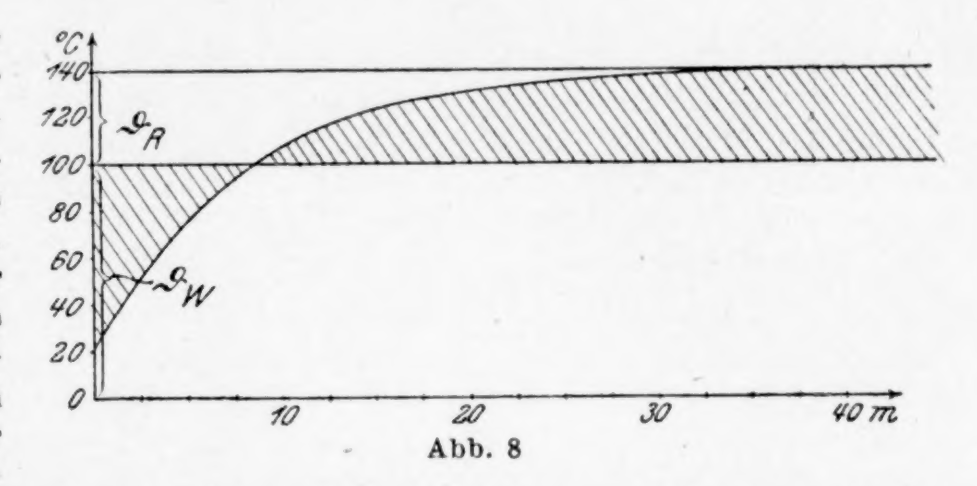


Abb. 8

Der Faktor $\frac{\zeta}{\alpha}$ ergibt sich zu:

$$\frac{\zeta}{\alpha} = 0{,}103\,\frac{1}{v\,c}$$

ist also, wenn wir von der geringen Veränderlichkeit der spez. Wärme mit der Temperatur absehen, im wesentlichen eine reine Geschwindigkeitsfunktion. Für Luft und $c = 0{,}238$ WE/kg habe ich ϑ_R für einige Geschwindigkeiten berechnet und in der folgenden Zahlentafel zusammengestellt:

$v =$	10,	25,	50,	100,	150,	200 m/s.
$\vartheta_R =$	0,102,	0,634,	2,54,	10,15,	22,80,	40,6° C.

Man sieht, daß die Vernachlässigung in den meisten praktischen Fällen ohne weiteres erlaubt ist.

Die abgeführte Wärme erhält man durch Einsetzen von (43) in die Gleichung:

$$dQ = \alpha\, 2 r \pi\, dz\, (\vartheta_w - \vartheta_z)$$

und Integration zwischen $z_1 = 0$ und $z_2 = l$ zu

$$Q = \vartheta_0 r^2 \pi v C\left(1 - e^{-\frac{2\alpha l}{r v C}}\right) - \tfrac{1}{2}\vartheta_R r^2 \pi v C\left(\frac{2\alpha l}{r v C}\right)^2 \quad \ldots \quad (44),$$

wobei höhere Potenzen von $\frac{2\alpha l}{r v C}$ vernachlässigt sind.

12. Der Wärmeübergang an einer ebenen Platte. Als zweite geometrische Konfiguration, für die wir den Wärmeübergang berechnen wollen, wählen wir eine ebene zur Stromrichtung parallele Platte. Diese soll so dünn sein, daß der Einfluß der Vorderkante vernachlässigt werden kann. Prandtl hat bereits in der oben erwähnten Arbeit nachgewiesen, daß für den Fall einer unendlich dünnen Platte, die parallel zu sich selbst durch eine Flüssigkeit bewegt wird, Geschwindigkeitsfeld und Temperaturfeld übereinstimmen, wenn man wieder von der Eigenerwärmung durch innere Reibung absieht.

Bezeichnet nämlich $\mathfrak{u}$ den Geschwindigkeitsvektor, p den Druck, so gilt für die zeitliche Aenderung des auf die Volumeinheit bezogenen Impulsvektors einer imkompressiblen Flüssigkeit, wenn man Schwerewirkungen vernachlässigt:

$$\left.\begin{aligned} \varrho \frac{D\mathfrak{u}}{ds} &= -\operatorname{grad} p + \mu \Delta \mathfrak{u}, \\ \frac{D}{dt} &= \frac{\partial}{\partial t} + u_x \frac{\partial}{\partial x} + u_y \frac{\partial}{\partial y} + u_z \frac{\partial}{\partial z} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (45),$$

anderseits schreibt sich die Kirchhoffsche Differentialgleichung für das Temperaturfeld:

$$\frac{D\vartheta}{dt} = \frac{\lambda}{c\varrho} \Delta \vartheta \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (46).$$

Für die Platte ist nun $p =$ konst, falls sie unendlich dünn ist, oder bei endlicher Dicke doch der Mittelwert von p über einen gewissen Bereich konstant; somit wird $\operatorname{grad} p = 0$ und man sieht, daß die beiden Gleichungen (45) und (46) formal übereinstimmen. Wenn $\frac{\lambda}{c\mu} = 1$ ist, wird demnach eine Lösung von (45) auch eine Lösung für (46) sein. Von diesem Umstande machen wir Gebrauch, in dem wir die Lösung für das Geschwindigkeitsfeld, wie sie v. Kármán in der vorangehenden Arbeit gegeben hat, übernehmen. Wir haben also:

$$u = U \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/7}, \quad \delta = 0{,}366 \left(\frac{\nu}{Uz}\right)^{1/5} z \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (47)$$

und dementsprechend:

$$\vartheta = \vartheta_0 \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/7}.$$

Die Bedingung für das Wärmegleichgewicht in einem Element der Grenzschicht lautet:

$$\frac{d}{dz} \int_0^\delta U \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/7} C\vartheta_0 \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/7} dy - C\vartheta_0 \frac{d}{dz} \int_0^\delta U \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/7} dy + q_0 = 0.$$

Führen wir die Ausdrücke (47) ein, so können wir nach q_0 auflösen und erhalten:

$$q_0 = 0{,}0285\, \vartheta_0 C U \left(\frac{\nu}{Uz}\right)^{1/5} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (48).$$

Die gesamte von einem Platten-Streifen der Breite 1 abgeführte Wärmemenge folgt dann gleich:

$$Q = \int_0^l q_0 \, dz = 0{,}0356\, C\, U\, \vartheta_0 l \left(\frac{\nu}{Ul}\right)^{1/5} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (46)$$

($l =$ Länge in der Stromrichtung).

13. Uebertragung auf tropfbare Flüssigkeiten. Im Voranstehenden haben wir gesehen, daß die Gesetzmäßigkeiten, die wir für den Wärmeübergang an einen turbulenten Flüssigkeitsstrom, für die beiden wichtigsten geometrischen Grundformen abgeleitet haben, im Falle strömender Gase (und überhitzter Dämpfe) zu Ergebnissen führen, die auch quantitativ mit der Erfahrung gut übereinstimmen. Wir können uns hier vollkommen der statistischen Anschauungen der kinetischen Gastheorie bedienen und kommen so zu der einheitlichen Auffassung sowohl der molekularen wie molaren Vorgänge bei der Reibung einerseits und der Wärmeübertragung anderseits.

Auf tropfbare Flüssigkeiten, bei denen man die Wirkung der molekularen Kohäsionskräfte nicht mehr vernachlässigen darf, kann man naturgemäß die obigen einfachen Ansätze nicht unmittelbar übertragen. Während die Wärme und Impulskonvektion durch das Wirbelsystem auch hier einen wesensgleichen Vorgang darstellen, ist dies für die molekulare Wärme und Impulsleitung nicht mehr der Fall. Die letztere Tatsache findet ihren Ausdruck darin, daß das Verhältnis $\frac{\lambda \varrho}{C\mu}$ von 1 stark verschieden ist. Für Wasser liegt die Größenordnung dieser Zahl, die stark von der Temperatur abhängig ist, etwa bei 0,1.

Das gemeinsame Gesetz für die molekularen und molaren Erscheinungen der inneren Reibung, das durch den Turbulenzkoeffizienten dargestellt wird, wird demnach auf die Wärmeausbreitung nur in jenem Gebiet übertragen werden können, in dem die

molaren Vorgänge überwiegen. Es ist dies aber, bis auf eine ganz dünne Schicht[1]) an der Wand das ganze Innere der Flüssigkeitsmasse, in welchem demnach die oben abgeleiteten Differential-Gleichungen ihre Gültigkeit behalten werden.

Um zu einer geeigneten Beschreibung des Wärmeüberganges für Flüssigkeiten zu gelangen, wird man somit einen Uebergang von dem statistischen Gesetz für das Innere der Flüssigkeitsmasse (Turbulenzkoeffizient) zu dem molekularen Gesetz in unmittelbarster Wandnähe (Wärmeleitzahl) suchen müssen. Mathematisch läßt sich dieser Uebergang durch eine Abänderung der Randbedingungen fassen. Auf diese Erweiterung der Theorie soll demnächst näher eingegangen werden. Immerhin ist aber zu bemerken, daß auch die bisherigen experimentellen Forschungsergebnisse, die sich ausschließlich auf den Wärmeübergang an Wasser beziehen, derart voneinander abweichende Resultate zeigen, daß ein einigermaßen klares Bild des Vorganges nur schwer gewonnen werden kann.

Mit erheblichem Aufwand hat Soennecken 1911 Versuche über den Wärmeübergang an Wasser in Röhren unternommen, die in der heutigen Literatur vielfach als maßgebend zitiert werden. Seine Ergebnisse faßt er in den beiden Formeln für die W.-Ue Zahl α zusammen:

1. glatte Oberfläche

$$\alpha = 2020 \frac{v^{0,9}}{d^{0,1}} (1 + 0,014\, T_i) \text{ WE/st m}^2\, {}^0\text{C},$$

2. rauhe Oberfläche

$$\alpha = 735 \frac{v^{0,7}}{d^{0,3}} (1 + 0,014\, T_i) \text{ WE/st m}^2\, {}^0\text{C}$$

(v = Wassergeschwindigkeit in m/s, d = Rohrdurchmesser in m, T_i = innere Rohrwandtemperatur in ⁰C). Unter glatter Oberfläche wird dabei ein nahtlos gezogenes Messingrohr verstanden, während die Versuche mit »rauher« Oberfläche mit Eisenrohren durchgeführt wurden. Diese Formeln widersprechen direkt unseren Grundanschauungen vom Wesen des Wärmeüberganges. Es ist nämlich ausgeschlossen, daß bei rauher Oberfläche die W.-Ue.-Zahl kleiner ist als bei glatter. Infolge der erhöhten Wirbelbildung wird der molare Wärmetransport verstärkt und damit die W.-Ue.-Zahl erhöht. Die geringeren Werte, die bei den Eisenrohren gemessen wurden, sind höchstwahrscheinlich infolge des Auftretens von Rost und Kesselsteinschichten auf eine unrichtige Bestimmung der wirklichen Wandtemperatur zurückzuführen.

Umfangreiche Versuche an Kondensatoren sind ferner von Josse in Charlottenburg angestellt worden. Josse hat dabei die Wärmedurchgangszahl k, von kondensierendem Dampf an Wasser gemessen, die durch die Formel[2]) definiert ist:

$$k = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{\lambda}{\delta} + \frac{1}{\alpha_2}}$$

(α_1, α_2 die W.-Ue.-Zahlen der Flüssigkeiten, λ die Wärmeleitzahl der Zwischenwand, δ deren Dicke). Er kommt nun, indem er für die λ, δ die bekannten Werte einsetzt und für den Wärmeübergang an Wasser die Zahlen von Nichol (rd. 4500 M.-E./m² st ⁰C), die in der Größenordnung eine Mittellage zwischen den Zahlen von Soennecken für glatte und rauhe Oberfläche darstellen, benutzt, für den Wärmeübergang von kondensierendem Dampf an Metall zu außergewöhnlich hohen Werten. Nach diesen Versuchen würde die W.-Ue.-Zahl für kondensierenden Dampf bis zu 7 mal so groß sein können, wie für strömendes Wasser.

Diese Ergebnisse sind gleichfalls nicht verständlich. Mit Nusselt[3]) können wir uns den Kondensationsvorgang an einer kalten senkrechten Wand so vorstellen, daß

[1]) Eine nähere Untersuchung zeigt, daß diese Schicht von wesentlich kleinerer Größenordnung ist, als die Grenzschicht selbst, die wir als das Gebiet, in welchem Schubspannung übertragen wird, definiert hatten. Für das Kreisrohr ist deren Dicke δ im hydrodynamisch ausgebildeten Zustand durch den Ausdruck gegeben.

$$\delta = 5,51 \frac{d}{R^{7/8}},$$

wo d den Durchmesser und R die Reynoldssche Zahl bedeutet.

[2]) Hütte I, 22. Auflage, S. 385.

[3]) W. Nusselt, Die Oberflächenkondensation des Wasserdampfes, Z. V. d. I. 1916, S. 541.

sich auf der kalten Oberflächenseite eine Wasserhaut bildet, auf die das gesamte Wärmegefälle von dem Dampf zur Wandtemperatur entfällt. Die Wasserhaut haftet an der einen Seite an der Wand, die übrigen Schichten fließen unter der Wirkung der Schwere nach abwärts. Da die Stärke der Wasserhaut jedenfalls sehr gering ist — nach der Nusseltschen Rechnung Bruchteile eines Millimeters — so haben wir es offenbar mit einer laminaren Strömung zu tun. Es ist nun nicht einzusehen, warum die W.-Ue.-Zahl von Wasser an die metallische Wand auf der einen Seite der Wand (wo noch dazu der Strömungszustand laminar ist) 7mal so groß sein soll als auf der anderen Seite (bei turbulenter Strömung).

Die Versuchsergebnisse von Josse müssen sich danach anders deuten lassen, so daß die W.-D.-Zahl k durch zwei annähernd gleich große Terme $\frac{1}{\alpha_1}$ und $\frac{1}{\alpha_2}$, wobei α_1 und α_2 mittlere Werte haben, dargestellt wird. Es erscheint sehr wahrscheinlich, daß demnach die W.-Ue.-Zahl an Wasser höhere Werte hat, als vielfach bisher angenommen wurde. Eine umfassende experimentelle Untersuchung des Wärmeüberganges an Flüssigkeiten erscheint dringend geboten, um die Richtigkeit der theoretischen Rechnungen prüfen zu können. Die Schwierigkeiten, die sich bei der Verwendung von Wasser durch Rostbildung und Kesselsteinansatz zeigen, legen es nahe, hierfür andere Flüssigkeiten, z. B. Oele, heranzuziehen. 86

Grundwasserströmung in einem abfallenden Gelände mit Abfanggraben.

Von L. HOPF und E. TREFFTZ in Aachen.

Die Probleme der Grundwasserströmung, bei denen die Geschwindigkeit (Durchflußmenge pro Einheit des Querschnittes in der Sekunde) proportional den auf die Flüssigkeit wirkenden Kräften gesetzt werden kann, führen mathematisch auf die gleichen Aufgaben (Integration der Gleichung $\Delta u = 0$) wie die Probleme der wirbellosen Strömung inkompressibler Flüssigkeiten. Speziell die ebenen Probleme sind daher den gleichen mathematischen Methoden der konformen Abbildung zugänglich, die für die idealen Flüssigkeiten, z. B. bei der Strahlbildung, zur Lösung führen. Im folgenden behandeln wir mit diesen Methoden eine Aufgabe, die unmittelbar der Praxis entnommen ist.

In den »Moosen« Süddeutschlands strömen beträchtliche Wassermengen mit geringer Geschwindigkeit im Erdreich. Die freie Oberfläche des Grundwassers liegt der Erdoberfläche nahe, was eine Versumpfung des Bodens zur Folge hat. Zum Zwecke der Trockenlegung solcher Moose und zugleich zur Ausnutzung der Wassermengen zur Kraftgewinnung sucht man das Grundwasser in Gräben abzufangen und wegzuleiten. Reicht dieser Abfanggraben nicht bis zur Sohle der Grundwasser führenden Schicht, sondern taucht nur bis zu einer gewissen Tiefe ein, so erhebt sich die Frage, welche Wassermengen ein solcher Graben der Grundwasserströmung entzieht, welche Geschwindigkeiten lokal auftreten, wie im einzelnen die Stromlinien verlaufen, insbesondere die Oberfläche der Grundwasserströmung, und welche konstruktiven Maßnahmen diese Größen beeinflussen.

1. Physikalische und mathematische Grundlagen. Auf die Flüssigkeit wirken Druckgefälle, Schwere und Reibungskräfte. Diese setzt man proportional der Geschwindigkeit und vernachlässigt alle Beschleunigungen. Derart erhält man für die Geschwindigkeitskomponenten den Ansatz:

$$u = -k\frac{\partial p}{\partial x}, \qquad v = -k\left(\frac{\partial p}{\partial y} + \gamma\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

oder vektoriell zusammengefaßt:

$$\mathfrak{w} = -\operatorname{grad} \varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1'),$$

wobei das Potential $\varphi = k(p + \gamma y)$ ist. Hierbei bedeuten:

k eine vom Material der Wasser führenden Schicht abhängige Konstante (reziproke Reibungszahl),

p den Druck,

γ das spezifische Gewicht des Wassers,

y die Höhe über einem Nullniveau.

Die Kontinuitätsgleichung ergibt dann für das Potential φ die Differentialgleichung $\Delta\varphi = 0$. In der gleichen Weise wie in der Theorie der idealen Flüssigkeiten oder überhaupt des ebenen Potentials fassen wir φ als den reellen Teil einer Funktion $\omega = \varphi + i\psi$ der komplexen Variabeln $z = x + iy$ auf, deren Imaginärteil ψ (die Stromfunktion) auf den Stromlinien konstante Werte hat.

Die Grenzbedingungen sind die folgenden:

Die undurchlässige Schicht und die freie Oberfläche müssen Stromlinien sein, d. h. es ist längs diesen $\psi =$ konst. An der freien Oberfläche muß außerdem der Druck gleich dem konstanten Drucke der Atmosphäre sein, den wir gleich Null setzen, d. h. es muß hier $\varphi = k\gamma y = cy$ gelten. Schließlich wird an der Grabensohle der Druck gleich dem hydrostatischen Drucke (die Bewegung des Wassers im Graben kann vernachlässigt werden), also $\varphi =$ konst.

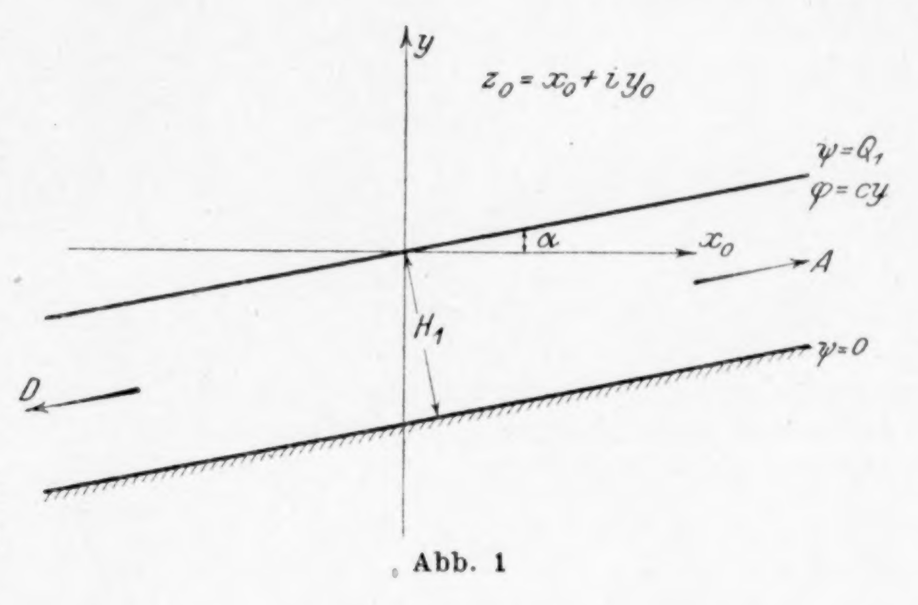


Abb. 1

2. Der Abfanggraben. Die Grundwasserströmung ohne Abfanggraben verläuft, Abb 1, geradlinig mit dem Gefällswinkel α der Sohle. Die Grundwassersohle sei die Stromlinie $\psi = 0$, der Grundwasserspiegel die Stromlinie $\psi = Q_1$, die Tiefe des Grundwassers sei H_1. Wir legen eine x_0 Achse horizontal, die y_0-Achse vertikal, den Nullpunkt in den Spiegel. Der unendlich ferne Punkt stromaufwärts sei A, stromabwärts D genannt. Das komplexe Potential wird

$$\omega = z_0 c \sin \alpha e^{-i\alpha} + iQ_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

und

$$\frac{Q_1}{c \sin \alpha} = H_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3).$$

Nun sei die Grundwasserströmung durch einen Abfanggraben gestört, dessen Spiegel auf dem Niveau $y = 0$ liege; der Punkt $x = 0$ $y = 0$ liege auf dem Schnittpunkt des Grabenspiegels mit dem ungestörten Grundwasserspiegel, Abb. 2. Die undurchlässige Schicht, die die Grundwasserströmung nach unten begrenzt, verlaufe geradlinig:

$$x \sin \alpha - y \cos \alpha = H_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4),$$

sie ist die Stromlinie $\psi = 0$; die freie Oberfläche oberhalb des Grabens (stromaufwärts) $\psi = Q_1$, unterhalb des Grabens (stromabwärts) $\psi = Q_2$, wobei $Q_2 < Q_1$. $Q_1 - Q_2$ ist die Wassermenge, welche im Graben fortgeführt und dem Grundwasserstrom entzogen wird. Längs der Grabensohle sei $\varphi = 0$, ψ fällt von Q_1 auf einen Minimalwert Q_m und wächst wieder bis Q_2. Die Schwierigkeit unseres Problems besteht genau wie bei den Strahlaufgaben der klassischen Hydromechanik darin, daß wir die Oberflächen der Strömung nicht kennen. Genau wie dort führen wir deshalb auch hier das komplexe Potential ω als unabhängige, z als abhängige Variable ein. In der ω-Ebene, Abb. 3, ist AB die Gerade $\psi = Q_1$ und zwar für alle positiven Werte von φ, CD die Gerade $\psi = Q_2$ für alle negativen Werte von φ und die Grundwassersohle AD die φ-Achse. Die Grabensohle $\varphi = 0$ entspricht dem Stück Q_1 bis Q_m und zurück bis Q_2 auf der ψ-Achse. Unser Gebiet in der ω-Ebene besteht also aus einem Streifen, der links der ψ-Achse die Höhe Q_2, rechts die Höhe Q_1 hat und längs der ψ-Achse bis Q_m aufgeschnitten ist.

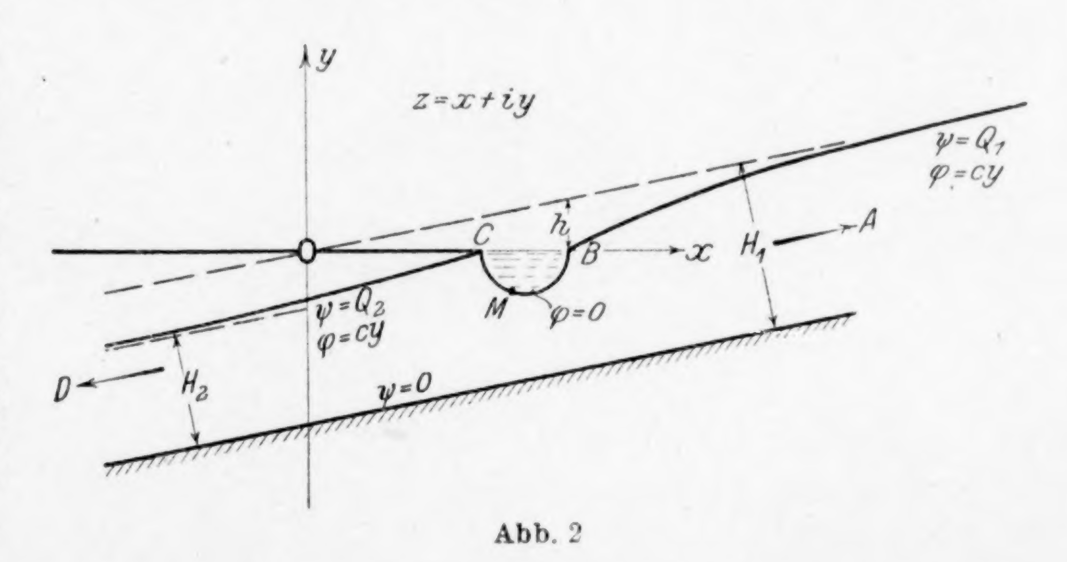


Abb. 2

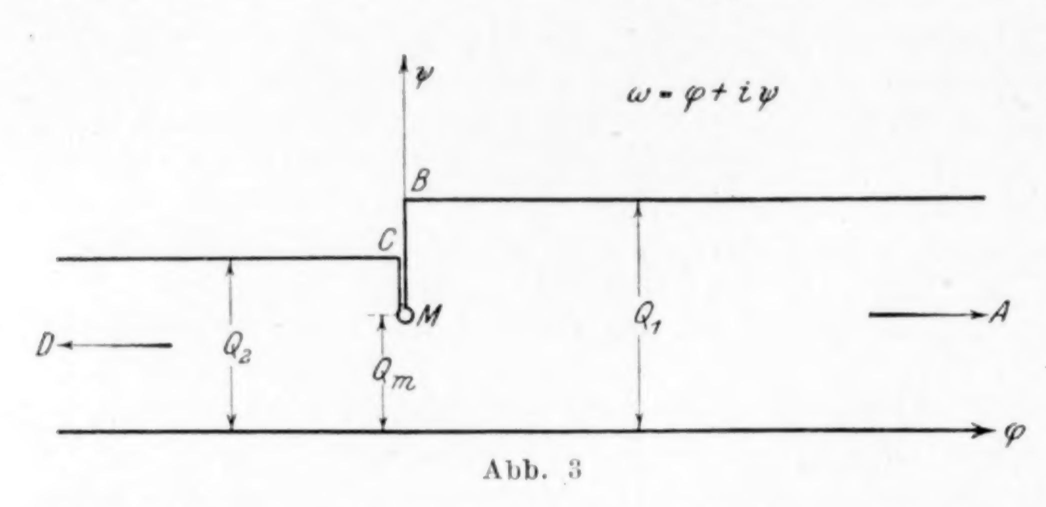


Abb. 3

Für dieses festbegrenzte Gebiet haben wir nun z als eine Funktion von ω so zu bestimmen, daß längs der φ-Achse

$$x \sin \alpha - y \cos \alpha = H_1 \quad (4)$$

wird, rechts längs $\psi = Q_1$ und links längs $\psi = Q_2$ $y = \frac{\varphi}{c}$, und daß die Streifenbegrenzung auf der ψ-Achse in den Grabenumriß $y = F(x)$ übergeht. Es liegt nahe, diese Aufgabe dadurch zu vereinfachen, daß man

$$z = z_0(\omega) + z_1(\omega) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5),$$

wobei

$$z_0 = \frac{(\omega - i\,Q_1)\,e^{i\alpha}}{c \sin \alpha} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

die Strömung ohne Abfanggraben darstellt, setzt und nun nur die Abweichung z_1 von der ungestörten Strömung zu bestimmen bleibt. Für z_1 ergeben sich die folgenden Randbedingungen, Abb. 4.

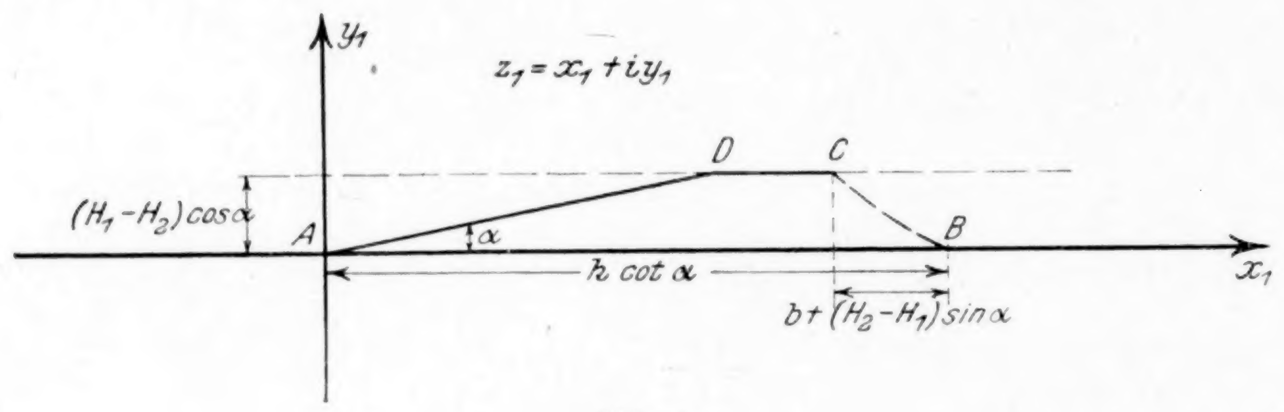


Abb. 4

Längs AB ist $\psi = Q_1$, also nach (5):

$$x + iy = \frac{\varphi}{c \sin \alpha} (\cos \alpha + i \sin \alpha) + x_1 + i y_1.$$

Die Grenzbedingung $y = \frac{\varphi}{c}$ verlangt mithin:

$$y_1 = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6).$$

Im Punkt A ist offenbar auch $x_1 = 0$, denn im Unendlichen beeinflußt der Graben die Strömung nicht. Längs AD ist $\psi = 0$ und $x \sin \alpha - y \cos \alpha = H_1$. Setzen wir hier x und y aus (5) mit $\psi = 0$ ein, so wird:

$$H_1 = \frac{\varphi}{c} \cos \alpha + \frac{Q_1}{c} \sin \alpha - \frac{\varphi}{c} \cos \alpha + \frac{Q_1}{c} \frac{\cos^2 \alpha}{\sin \alpha} + x_1 \sin \alpha - y_1 \cos \alpha,$$

daher, bei Benutzung von (3)

$$x_1 \sin \alpha - y_1 \cos \alpha = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7).$$

Längs CD ist $\psi = Q_2$, also nach (5)

$$y = \frac{\varphi}{c} + \frac{Q_2 - Q_1}{c} \operatorname{cotg} \alpha + y_1.$$

Da $y = \frac{\varphi}{c}$ sein soll, muß

$$y_1 = \frac{Q_1 - Q_2}{c} \operatorname{cotg} \alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

sein.

3. Herstellung der Abbildung. Betrachten wir in der z_1-Ebene das Gebiet, in das unser Streifen der ω-Ebene übergeführt wird, so gehen die horizontalen Begrenzungen unseres Streifens in die mit gleichen Buchstaben bezeichneten Strecken der z_1-Ebene über. Die Verbindung der Punkte C und B, die dem Grabenumriß entspricht,

bleibt auf der z_1-Ebene noch unbestimmt. Wir vereinfachen die Aufgabe dadurch, daß wir nicht den Grabenumriß vorgeben und die zugehörige Strömung aufsuchen, sondern die Größen Q_1, Q_2 und Q_m geben und hierzu eine Grabenform aufsuchen. Zu diesem Zweck untersuchen wir zunächst den Zusammenhang zwischen der Grabenbreite b, der Absenkung h am Punkte B, der Absenkung im Unendlichen $H_1 - H_2$ und den Abmessungen des abzubildenden Streifens in der z_1-Ebene. Aus Abb. 2 folgt für die Absenkung $h = x(B) \operatorname{tg} \alpha$, also, wenn wir in (5) für den Punkt B $\varphi = 0$, $\psi = Q_1$ einsetzen ($x_0 = 0$),

$$h = x_1(B) \operatorname{tg} \alpha \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (9),$$

sodaß also die Strecke AB in der z_1-Ebene $x_1(B) = h \operatorname{cotg} \alpha$ wird (9').

Der Unterschied der Abszissen $x_1(B) - x_1(C)$ rechnet sich aus (5), wenn wir für B $\varphi = 0$, $\psi = Q_1$, für C $\varphi = 0$, $\psi = Q_2$ einsetzen und berücksichtigen, daß die Grabenbreite $b = x(B) - x(C)$ ist:

$$x_1(B) - x_1(C) = b + (H_1 - H_2) \sin \alpha \quad \ldots \ldots \quad (10),$$

dabei ist analog zu H_1

$$H_2 = \frac{Q_2}{c \sin \alpha} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (3')$$

die Grundwassertiefe im Unendlichen stromabwärts.

Mit Benutzung dieser Abkürzung folgt ferner aus (6) und (8)

$$y_1(D) = y_1(C) = (H_1 - H_2) \cos \alpha \quad \ldots \ldots \ldots \quad (11).$$

Das mathematische Problem, die ω-Ebene auf die z_1 Ebene abzubilden, lösen wir durch Einführung einer Hilfsvariablen ζ, indem wir sowohl unseren Streifen in der ω-Ebene als auch das Gebiet der z_1-Ebene auf den ersten Quadranten der ζ-Ebene abbilden. Dabei soll der Punkt B ins Unendliche rücken, C in den Nullpunkt fallen, A und D auf der positiv reellen, M auf der positiv imaginären Achse liegen.

$$(C\colon \zeta = 0,\ B\colon \zeta = \infty,\ A\colon \zeta = a,\ D\colon \zeta = d,\ M\colon \zeta = i m).$$

Die Abbildung der ω-Ebene auf den ersten Quadranten der ζ-Ebene wird geliefert durch die Formel

$$\omega = \frac{Q_1}{\pi} \ln \frac{a + \zeta}{a - \zeta} - \frac{Q_2}{\pi} \ln \frac{\zeta + d}{\zeta - d} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (12)$$

oder wenn

$$\lambda_1 = \ln \frac{r_1'}{r_1},\quad \lambda_2 = \ln \frac{r_2'}{r_2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (13)$$

(siehe Abb. 5) gesetzt wird,

$$\omega = \frac{Q_1}{\pi} \{\lambda_1 + i(\pi - \vartheta_1)\} - \frac{Q_2}{\pi} \{\lambda_2 - i \vartheta_2\} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (14).$$

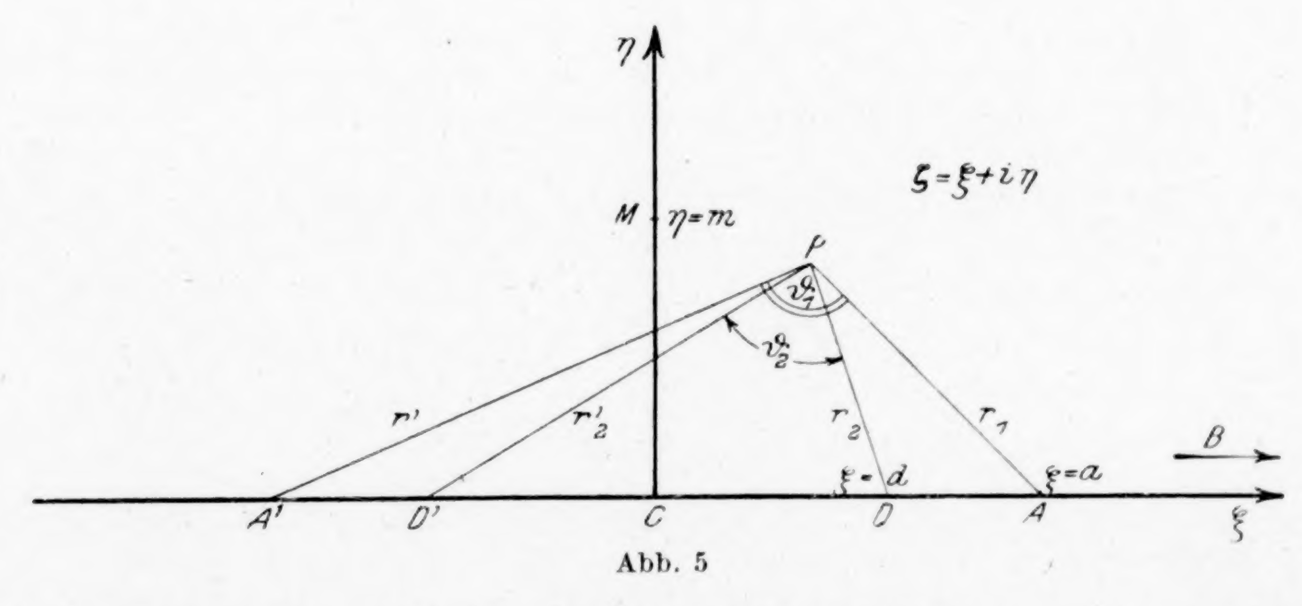


Abb. 5

In der letzten Form können wir die Richtigkeit unserer Formel unmittelbar einsehen: Für alle positiv reellen ζ sind λ_1 und λ_2 beide positiv, im Unendlichen (B) und auf der ganzen positiven η-Achse ist $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. In A wird λ_1, in D λ_2 unendlich. Auf der Strecke AB ist $\vartheta_1 = \vartheta_2 = 0$; auf AD $\vartheta_1 = \pi$, $\vartheta_2 = 0$; auf CD $\vartheta_1 = \vartheta_2 = \pi$, auf der positiven η Achse gehen ϑ_1 und ϑ_2 von π im Nullpunkt (C) bis 0 im Unendlichen (B). Es wird also

Längs AB: $\psi = Q_1$ φ durchläuft alle positiven Werte von 0 (B) bis $+\infty$ (A),
» AD: $\psi = 0$ φ » » Werte von $+\infty$ (A) bis $-\infty$ (D),
» CD: $\psi = Q_2$ φ » » negativen Werte von $-\infty$ (D) bis 0 (C).
» der imaginären Achse wird $\varphi = 0$.

Es wird also durch (14) der erste Quadrant der ζ-Ebene in der Tat in den gegebenen Streifen der ω-Ebene übergeführt.

4. Bestimmung der Konstanten. Um die relative Lage der Punkte M, A und D auf der ζ-Ebene zu bestimmen, berücksichtigen wir, daß ψ in M ein Minimum hat; es muß also dort $\frac{\partial \psi}{\partial \eta} = 0$ sein, d. h.

$$-\frac{Q_1}{\pi}\frac{\partial \vartheta_1}{\partial \eta} + \frac{Q_2}{\pi}\frac{\partial \vartheta_2}{\partial \eta} = 0.$$

Längs der η-Achse ist:

$$\cot\frac{1}{2}\vartheta_1 = \eta/a, \qquad \cot\frac{1}{2}\vartheta_2 = \eta/d.$$

Wenn für den Punkt M

$$\vartheta_1 = \vartheta_{1m} \qquad \vartheta_2 = \vartheta_{2m}$$

wird, so ist dort

$$\frac{\partial \vartheta_1}{\partial \eta} = -\frac{\sin\vartheta_{1m}}{m}, \qquad \frac{\partial \vartheta_2}{\partial \eta} = -\frac{\sin\vartheta_{2m}}{m}.$$

Daher wird:

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{\sin\vartheta_{2m}}{\sin\vartheta_{1m}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (15).$$

Aus dieser Beziehung und

$$Q_m = \frac{Q_1}{\pi}\{\pi - \vartheta_{1m}\} + \frac{Q_2}{\pi}\vartheta_{2m} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (16)$$

folgt die relative Lage von A und D gegen M.

Damit haben wir den Zusammenhang von ω und ζ gefunden. Um nun das Gebiet der z_1-Ebene ebenfalls auf den ersten Quadranten der ζ-Ebene abzubilden, setzen wir

$$\frac{dz_1}{d\zeta} = \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{\alpha/\pi}(\zeta - a)^{1-\alpha/\pi}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (17)$$

oder

$$z_1 = \int_a^\zeta \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta - d)^{\alpha/\pi}(\zeta - a)^{1-\alpha/\pi}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (18).$$

Darin ist $f(\zeta)$ eine Funktion, die für positiv reelle $\zeta = \xi$ positiv, im ganzen ersten Quadranten regulär und im Unendlichen Null ist. Durch Verfügung über diese Funktion $f(\zeta)$ können wir die Grabenform variieren resp. unsere Lösung einer vorgeschriebenen Grabenform anpassen. Daß (17) und (18) wirklich die Lösung liefern, erkennen wir folgendermaßen: Bezeichnen wir mit r_1 und r_2 die Entfernungen von den Punkten A und D, so ist

längs CD: $\zeta - d = r_2 e^{i\pi}$, $\zeta - a = r_1 e^{i\pi}$, also: $\frac{dz_1}{d\zeta} = r_2^{-\alpha/\pi}\, e^{-i\alpha}\, r_1^{\alpha/\pi - 1}\, e^{i(\alpha-\pi)} f(\xi)$

» DA: $\zeta - d = r_2$, $\zeta - a = r_1 e^{i\pi}$, also: $\frac{dz_1}{d\zeta} = r_2^{-\alpha/\pi}\, r_1^{\alpha/\pi - 1}\, e^{i(\alpha-\pi)} f(\xi)$

» AB: $\zeta - d = r_2$, $\zeta - a = r_1$, also: $\frac{dz_1}{d\zeta} = r_2^{-o/\pi}\, r_1^{\alpha/\pi - 1} f(\xi)$.

Da hier $d\zeta = d\xi$ reell ist, so folgt, wenn dR das positiv reelle Differential $dR = r_2^{-\alpha/\pi}\, r_1^{(\alpha/\pi - 1)} f(\xi)\, d\xi$ bedeutet:

längs CD: $dz_1 = -dR$,
» DA: $dz_1 = -e^{i\alpha} dR$,
» AB: $dz_1 = +dR$.

Es werden also in der Tat die drei Abschnitte der ξ-Achse in der z_1-Ebene auf zwei horizontale Geradenstücke und eines von der Neigung α abgebildet, wie es verlangt war.

5. Anpassung an die Grabenform. Durch unsere Abbildung geht die η-Achse in die Grabenform über. Für $f(\zeta)$ machen wir den Ansatz:

$$f(\zeta) = \frac{A_1}{\zeta + e l} + \frac{A_2}{(\zeta + e l)^2} + \dots \qquad (19),$$

wobei wir uns für die praktische Rechnung auf zwei Glieder beschränken werden. Die Größe l ist dabei willkürlich, da wir jede Funktion $f(\zeta)$ im ersten Quadranten in der Form (19) annähern können. Die Koeffizienten A_1 und A_2 bestimmen sich aus den Grabenabmessungen.

Die Absenkung des Grabens ist gegeben durch (9):

$$h = x_1(B) \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \alpha \int_a^\infty \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta - d)^{\alpha/\pi} (\zeta - a)^{1-\alpha/\pi}}.$$

Dieses Integral läßt sich einfach auswerten, wenn man berücksichtigt, daß $\frac{\alpha}{\pi}$ eine sehr kleine Größe (etwa 10^{-3}) ist. Wir können also überall außer in der unmittelbaren Umgebung der Punkte A und D

$$(\zeta - d)^{\alpha/\pi} = 1 \text{ und } (\zeta - a)^{1-\alpha/\pi} = \zeta - a$$

setzen. Bei Auswertung des Integrals kommt es nur auf die unmittelbare Umgebung des Punktes A an. Man teilt das Integral in ein Integral von a bis $a + \varepsilon$ und eines von $a + \varepsilon$ bis ∞ und behält nur aus dem ersten einen Ausdruck von der Größenordnung $\frac{\pi}{\alpha}$ übrig. Es wird

$$h = \pi f(a) + \text{Größen von der Ordnung } \frac{\alpha}{\pi} \qquad (20).$$

Um die Beziehung zwischen der Absenkung h und der abgefangenen Wassermenge $Q_1 - Q_2$ zu erhalten, berücksichtigen wir, daß nach (11)

$$y_1(D) = (H_1 - H_2) \cos \alpha = \frac{Q_1 - Q_2}{c} \cot \alpha.$$

Da

$$z_1(D) = \int_a^d \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta - d)^{\alpha/\pi} (\zeta - a)^{1-\alpha/\pi}} = + e^{i\alpha} \int_d^a \frac{f(\xi)\, d\xi}{(\xi - d)^{\alpha/\pi} (a - \xi)^{1-\alpha/\pi}},$$

wird

$$\frac{Q_1 - Q_2}{c} \cot \alpha = \sin \alpha \int_d^a \frac{f(\xi)\, d\xi}{(\xi - d)^{\alpha/\pi} (a - \xi)^{1-\alpha/\pi}}.$$

Dies Integral zerlegen wir in drei Teile, von d bis $d + \varepsilon$, von $d + \varepsilon$ bis $a - \varepsilon$ und von $a - \varepsilon$ bis a. Nur vom letzten Teil bleibt ein Glied von der Größenordnung $\frac{\pi}{\alpha}$ übrig, so daß in erster sehr guter Näherung

$$\int_d^a \frac{f(\xi)\, d\xi}{(\xi - d)^{\alpha/\pi} (a - \xi)^{1-\alpha/\pi}} = \frac{\pi}{\alpha} f(a),$$

also

$$\frac{Q_1 - Q_2}{c \sin \alpha} = \operatorname{tg} \alpha \frac{\pi}{\alpha} f(a) = \pi f(a) \qquad (21).$$

Der Vergleich der beiden Formeln (20) und (21) ergibt

$$\frac{Q_1 - Q_2}{c \sin \alpha} = H_1 - H_2 = h \qquad (22)$$

oder

$$\frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{h}{H_1} \qquad (23).$$

Bis auf Größen von der Ordnung $\frac{\alpha}{\pi}$ verhält sich also die abgefangene Grundwassermenge zu der gesamten in der Schicht fließenden Menge wie die Absenkung des

Spiegels unter den ungestörten Grundwasserspiegel zur Tiefe der Schicht. Die abgefangene Menge wird also in erster Ordnung von keiner andern Abmessung des Grabens beeinflußt als von der Absenkung, insbesondere hängt sie von der Breite oder der Wassertiefe im Abfanggraben nicht ab. Als Näherungsformeln sind bisher in der Praxis gelegentlich verwendet worden

$$\frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{t}{H_1 - h}, \quad \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{h + t}{H_1} \quad (t = \text{Wassertiefe im Abfanggraben}).$$

Beide Formeln geben die Verhältnisse nicht richtig wieder. Von der Tiefe des Wassers im Graben hängt die abgefangene Menge nicht ab; denn entsprechend der Tiefe wird das in den Graben eingedrungene Wasser wieder aus dem Graben abgeführt. Von der Tiefe und Breite des Wassers im Graben hängt natürlich Q_m ab; die einströmende Menge wird durch alle diese Größen beeinflußt, aber die Ausströmung in derselben Weise, so daß der Grad des Abfangens nur durch h reguliert wird.

6. Numerisches Beispiel. Mit Hilfe unserer Formeln wollen wir folgendes Beispiel durchrechnen. Wir stellen uns die Aufgabe, in eine Grundwasserströmung von der Neigung 0,003 einen Graben einzuziehen, der die Hälfte des Grundwassers abfängt. Nehmen wir an, daß 5 vH der Grundströmung in den Graben mit eindringt, ihn aber wieder verläßt, so wird

$$Q_2 = 0{,}5\, Q_1 \qquad Q_m = 0{,}45\, Q_1.$$

Wir wählen als Längeneinheit die Tiefe H_1 der ungestörten Grundwasserströmung; dann ist $H_2 = 0{,}5$, $H_m = 0{,}45$ und nach Formel (22) auch $h = 0{,}5$.

Da in der ζ-Ebene nur Verhältnisgrößen auftreten, so können wir den Punkt M in den Punkt $\zeta = i$ legen.

Aus den Formeln

$$\frac{H_1}{H_2} = \frac{\sin \vartheta_{2m}}{\sin \vartheta_{1m}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (15)$$

und

$$\pi H_m = H_1 (\pi - \vartheta_{1m}) + H_2 \vartheta_{2m} \quad \ldots \ldots \ldots (16)$$

ergeben sich dann

$$\vartheta_{1m} = 151^0 \qquad \vartheta_{2m} = 104^0$$
$$a = 3{,}87 \qquad d = 1{,}28.$$

Mit Hilfe dieser Zahlen ergeben sich (Abb. 5, Formel 14)

$$\frac{\varphi}{c \sin \alpha} = \frac{1}{\pi} \lambda_1 - \frac{1}{2\pi} \lambda_2, \quad \frac{\psi}{c \sin \alpha} = \frac{\pi - \vartheta_1}{\pi} - \frac{\vartheta_2}{2\pi} \quad \ldots \ldots (14).$$

Um das Strömungsbild in der z-Ebene zu finden, müssen wir zunächst $z_0 = \frac{\omega - i Q_1}{c \sin \alpha} e^{i\alpha}$ (2) rechnen, d. h.

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= \frac{\varphi}{c \sin \alpha} \cos \alpha - \frac{\psi - Q_1}{c \sin \alpha} \sin \alpha \sim \frac{\varphi}{c \sin \alpha} \\ y_0 &= \frac{\varphi}{c \sin \alpha} \sin \alpha + \frac{\psi - Q_1}{c \sin \alpha} \cos \alpha \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots (2).$$

Das zweite Glied im Ausdruck für x_0 ist weggelassen, weil es kleiner als $\sin \alpha$ ist, das erste Glied für y_0 muß stehen bleiben, weil es für große φ von Bedeutung ist.

Zur Berechnung von $z = z_0 + z_1$ (5) bleibt noch das Integral:

$$z_1 - z_1(B) = \int\limits_{\infty}^{\zeta} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta - d)^{\alpha/\pi} (\zeta - a)^{1 - \alpha/\pi}} \quad \ldots \ldots \ldots (18)$$

auszuwerten.

Für $f(\zeta)$ machen wir den Ansatz

$$f(\zeta) = \frac{A_1}{\zeta + l} + \frac{A_2}{(\zeta + l)^2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (19).$$

In dem Integral (18) können wir, abgesehen von der unmittelbaren Umgebung des Punktes A $(\zeta - d)^{\alpha/\pi} = 1$ $(\zeta - a)^{1 - \alpha/\pi} = \zeta - a$ setzen und erhalten durch Partialbruchzerlegung:

$$z_1 - z_1(B) = \frac{A_2}{(l + a)(\zeta + l)} + f(a) \ln \frac{\zeta - a}{\zeta + l}.$$

Nun ist nach Formel (20) $f(a) = \frac{h}{\pi} = \frac{1}{2\pi}$.

Willkürlich sind also zunächst noch A_2 und l. Damit eine positive Grabenbreite herauskommt, muß l wesentlich größer als a sein. Wir haben $l = 7{,}25$ gewählt und A_2 so bestimmt, daß $b = {}^1/_{15}$ wird, das ergibt

$$\frac{A_2}{a+l} = 0{,}242.$$

Es wird also

$$\left.\begin{aligned} x_1 - x_1(B) &= \frac{1}{2\pi}\ln\frac{r_a}{r_l} + 0{,}242\,\frac{\cos\vartheta_l}{r_l} \\ y_1 - y_1(B) &= \frac{1}{2\pi}\,\Theta - 0{,}242\,\frac{\sin\vartheta_l}{r_l} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (24),$$

wobei r_l die Länge des Fahrstrahls vom Punkte $\zeta = -l$ nach ζ bedeutet und ϑ_l der Winkel dieses Fahrstrahls gegen die ξ-Achse ist. Θ ist der Winkel dieses Fahrstrahls gegen die Richtung von ζ nach a.

Dabei ist

$$x_1(B) = h\cot\alpha = \frac{10^3}{6}, \qquad y_1(B) = 0.$$

In der Nähe von $\zeta = a$, d. h. in größerer Entfernung oberhalb des Grabens, gilt (24) nicht mehr. Man muß von A aus entwickeln und erhält:

$$z_1 = \frac{\pi}{\alpha} f(a)\,(\zeta - a)^{\alpha/\pi} = \frac{h}{\alpha}\,(\zeta - a)^{\alpha/\pi}$$

$$= \frac{1000}{6}\,(\zeta - a)^{0{,}000956} \quad . \; . \quad (25).$$

Die Resultate der rechnerischen Auswertung von (24) und (25) sind in Abb. 6 und 7 wiedergegeben. Es bietet keine grundsätzlichen Schwierigkeiten, die Parameter von $f(\zeta)$ so zu bestimmen, daß sich die Grabenform vorgegebenen Verhältnissen anpaßt. Wir wollen aber nicht näher auf diese Diskussion eingehen, da sie uns von geringem praktischen Interesse zu sein scheint. Die abgeführte Wassermenge und der Verlauf des Grundwasserspiegels, abgesehen von der unmittelbaren Umgebung des Grabens, sind von der Grabenform un-

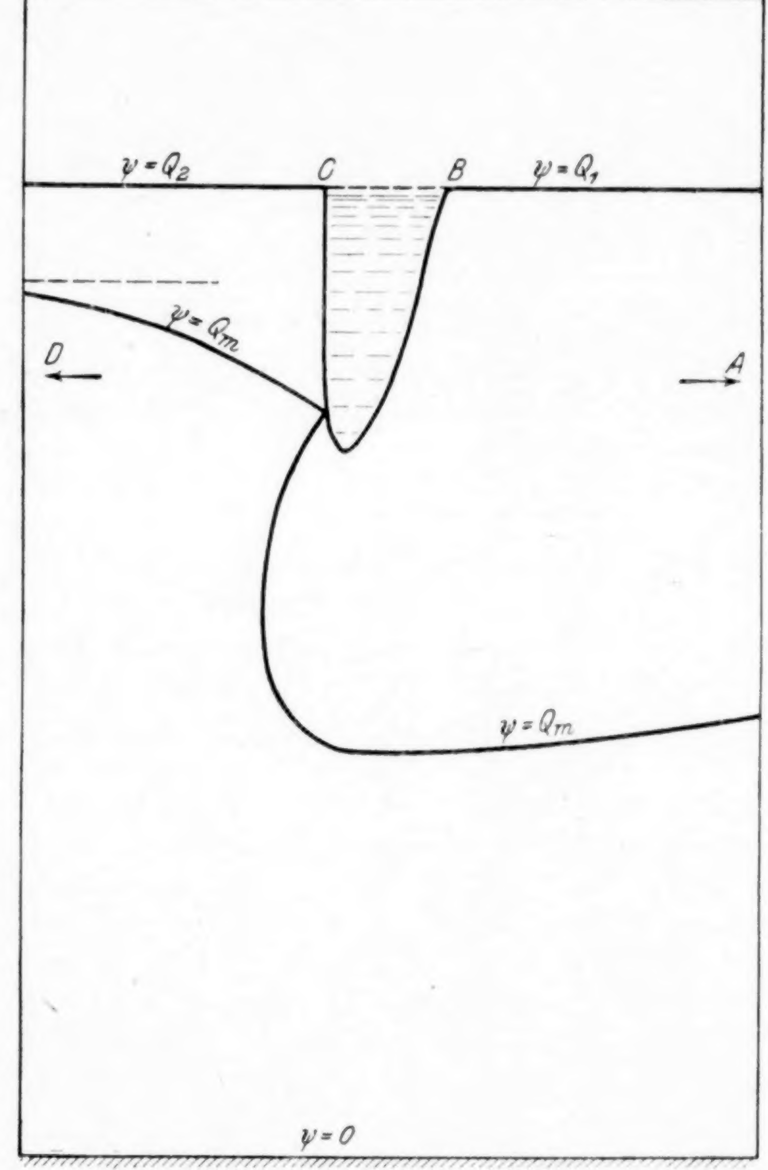


Abb. 6

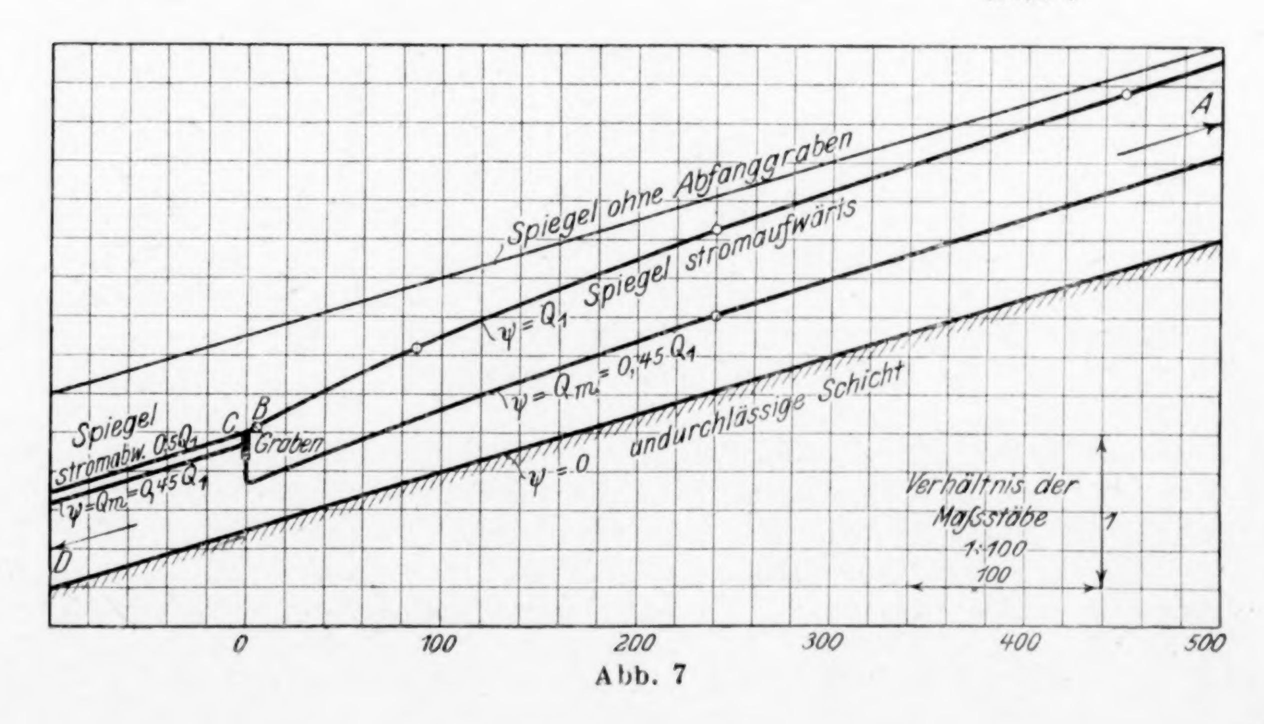


Abb. 7

abhängig. Die Form des Grabens wird wesentlich durch die Strömungsverhältnisse im Graben selbst bestimmt.

Zum Schluß ist noch folgendes zu bemerken: Unsere Rechnung stellt insofern einen Spezialfall dar, als wir den Grundwasserspiegel stromaufwärts am Graben in der Höhe des Grabenspiegels ansetzen. Es wäre an sich nicht ausgeschlossen, daß Wasser durch die Grabenwand oberhalb des Spiegels einträte und an der Grabenböschung herabsickerte. Dies wird dann eintreten, wenn man, ohne die abgeführte Menge $Q_1 - Q_2$ zu ändern, durch entsprechende Dimensionierung des Grabens den Spiegel weiter senkt, als unsere Rechnung ergibt. Unsere Rechnung liefert also: die kleinste Wassermenge bei gegebener Absenkung oder umgekehrt die kleinste Absenkung bei gegebener Wassermenge. 87

Das Problem der Iterationen.

Von **R. v. MISES** in Berlin.

Wer dem Ablauf einer vom Zufall beherrschten Reihe von Alternativ-Vorgängen (Kopf- oder Adlerspiel, Geschlechtsverhältnis der Geburten usw.) seine Aufmerksamkeit zuwendet, wird unmittelbar auf die Beobachtung der längeren oder kürzeren Wiederholungsfolgen desselben Ergebnisses hingewiesen. Alle sogenannten Spielsysteme knüpfen an diese Wiederholungen oder »Iterationen« an und auch in den Wahrscheinlichkeits-Betrachtungen des gewöhnlichen Lebens mißt man ihnen die größte Bedeutung bei. Wenn beim Spiel auf »grad oder ungrad« fünfmal nacheinander »grad« erschienen ist, meint man, das nächste Mal könne es nicht mehr so bleiben; umgekehrt geht eine weit verbreitete Ansicht dahin, daß auf einen Eisenbahnunfall stets noch zwei weitere folgen (hier lautet die Alternative: glücklicher oder unglücklicher Ausgang einer Eisenbahnfahrt). Beide Anschauungen haben auch schon ihre wissenschaftliche Vertretung gefunden: Der Philosoph Karl Marbe sucht in einem umfangreichen Werke »Die Gleichförmigkeit in der Welt«[1]) den Nachweis zu erbringen, daß lange Iterationen tatsächlich seltener vorkommen, als es die Wahrscheinlichkeitsrechnung erwarten läßt, und der Biologe Paul Kammerer häuft in seinem »Gesetz der Serie«[2]) eine Menge von Einzelbeobachtungen, um zu zeigen, daß wenigstens kurze Wiederholungsfolgen weit häufiger auftreten, als man durchschnittlich erwarten sollte.

In der vorliegenden Arbeit wird zunächst das mathematische Problem der Iterationen, das bisher nicht erledigt war[3]), einer Lösung zugeführt, d. h. die allgemeine Frage folgender Art beantwortet: Welches ist die Wahrscheinlichkeit w dafür, daß bei n Würfen mit einer Münze gerade x Iterationen der Länge m, also z. B. bei tausend Würfen drei Folgen von genau sechs gleichen Ergebnissen eintreten? Die Antwort lautet hier, wenn die Wahrscheinlichkeiten der beiden möglichen Einzelergebnisse, Kopf oder Adler, zu $1/2$ angenommen werden, $w = 0{,}032$. Allgemein werden wir zeigen, daß bei genügend großem n:

$$w(x) = \frac{e^{-a} a^x}{x!},$$

gilt, wenn a die aus dem Beobachtungsumfang n, der Iterationslänge m und den Grundwahrscheinlichkeiten zu ermittelnde »Erwartungszahl« von Iterationen bedeutet. Von dieser konkreten Lösung aus ergibt sich erst die Möglichkeit, das zur Begründung jener populären Ansichten Gesagte einwandfrei zu beurteilen.

Wie bei allen derartigen Problemen der Wahrscheinlichkeitsrechnung bietet die Lösung, sobald einmal die Aufgabe klar formuliert (**1**) und auf die vier Grundaufgaben der Wahrscheinlichkeitsrechnung zurückgeführt ist, keinerlei grundsätzliche Schwierigkeiten. Man kann ein Verfahren angeben (**2**), das die gesuchte Wahrscheinlichkeit in einer endlichen Anzahl von Schritten aufzufinden gestattet. Wird aber der Umfang n der Beobachtungsreihe sehr groß, so verliert dieses Verfahren seine praktische Anwendbarkeit und die Lösung gelingt nur auf einem Umweg: Man muß die sogenannten »Momente« der gesuchten Wahrscheinlichkeitsfunktion einführen (**3**), für die sich eine gerade bei großem n sehr brauchbare Abschätzung finden läßt (**4**). Aus den Grenzwerten der Momente kann man dann auf Grund neuerer Ergebnisse über das »Momentenproblem« auf die zu ermittelnde Funktion selbst schließen (**5** und **6**). Der Vergleich mit den von

[1]) 2 Bde. München 1916/1919. — [2]) Stuttgart u. Berlin 1919. — [3]) Ueber die Literatur vergl. L. v. Bortkiewicz, Die Iterationen, Berlin 1917, sowie meinen Aufsatz in »Die Naturwissenschaften«, 7, 1919, S. 168 ff.

Marbe angeführten Beobachtungsergebnissen zeigt so weitgehende Uebereinstimmung (**7**), daß man zu einer vollständigen Ablehnung der von Marbe an der heutigen Wahrscheinlichkeitsrechnung geübten Kritik gelangen muß. Auch gegenüber dem Kammererschen Gesetz der Serie ergibt sich kein anderer Standpunkt, wenn auch der Mangel an konkreten Zahlenangaben eine zahlenmäßige Nachprüfung nicht gestattet.

1. Die Aufgabe. Wir wollen die beiden Möglichkeiten, zu denen ein einfacher Alternativ-Versuch Anlaß gibt, kurz als das Auftreten einer »Null« oder einer »Eins« bezeichnen. Es sei p die Wahrscheinlichkeit der Null, q die der Eins, also jedenfalls

$$p > 0, \quad q > 0, \quad p + q = 1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1).$$

Wird der Versuch n mal wiederholt, so kann man das Ergebnis, beispielsweise für $n = 12$, in der Form anschreiben:

001110100110 od. ähnl.

Man sieht hier, daß in diesem Fall gerade dreimal genau zwei aufeinander folgende Versuche gleich ausgefallen sind, nämlich die ersten beiden, die Null ergaben, ebenso wie der achte und neunte, während beim zehnten und elften die Eins auftrat. Einmal sind drei aufeinander folgende Versuchsergebnisse gleich gewesen, nämlich das dritte, vierte und fünfte. Wir sagen, das Ergebnis der Versuchsreihe weise »drei Iterationen der Länge 2 und eine Iteration der Länge 3« auf. Allgemein können x Iterationen der Länge m auftreten, wenn

$$x m \leq n \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2).$$

Wir fragen dann nach der Wahrscheinlichkeit dafür, daß in einer Versuchsreihe vom Umfang n gerade x Iterationen von der Länge m erscheinen, und wollen diese Größe, die von den vier Veränderlichen p, x, m und n abhängt, mit $w_n(x)$ bezeichnen, indem wir die Abhängigkeit von x besonders hervorheben, n als Parameter betrachten und auf die ausdrückliche Anführung von p und m verzichten.

Um die Rechnung etwas einfacher zu gestalten, ist es zweckmäßig, den Begriff der Iteration, wie er sich aus dem Vorstehenden ergibt, etwas abzuändern. Wir wollen uns nämlich die Ergebnisreihe, die aus Nullen und Einsern besteht, cyklisch angeordnet denken, also so, daß die zwölf eben angeführten Zahlen (0 oder 1) etwa zwölf aufeinander folgenden Punkten eines Kreises beigeschrieben werden. (Vergl. Abb. 1, in der die Nullen durch kleine Kreise, die Einser durch radiale Striche angedeutet erscheinen.) Dann erscheinen in unserm Beispiel zweimal Gruppen von drei gleichen Nachbarn, nämlich die Versuchsergebnisse 12, 1, 2 und die Ergebnisse 3, 4, 5, ferner zwei Gruppen von zwei gleichen Nachbarn, 8, 9 und 10, 11. Bei dieser Auffassung weist also die als Beispiel angeführte Versuchsreihe zwei Iterationen der Länge 2 und zwei Iterationen der Länge 3 auf. Natürlich kann man die oben gestellte Aufgabe sowohl für die eine als für die andre Definition der Iterationen lösen. Allein es ist klar, daß wenn n sehr groß ist, es sich also um Reihen etwa von mehreren tausend Einzelversuchen handelt, der Unterschied zwischen beiden Fällen verschwindend klein wird. Wir wollen uns im folgenden stets an die zweite Auffassung halten.

An Abb. 1 erkennt man auch deutlich, daß die Zahl x, wenn m gegeben ist, völlig eindeutig einem jeden aus n Einzelgliedern bestehenden cyklischen System zugeordnet ist. Man denke sich etwa für $m = 3$ einen »Zug«, bestehend aus den Elementen 01110, die Kreisbahn durchlaufen und an jedem der n Teilpunkte Halt machen. So oft die $m + 2$ Elemente des Zuges mit den $m + 2$ feststehenden, die sie gerade decken, übereinstimmen, liegt eine Einser-Iteration der Länge m vor. Zu dieser Anzahl x_1 addiere man die analog mit einem Zug von der Gestalt 10001 festgestellte Anzahl x_0 von Null-Iterationen der Länge m und erhält dann in $x_0 + x_1$ die gesuchte Zahl x.

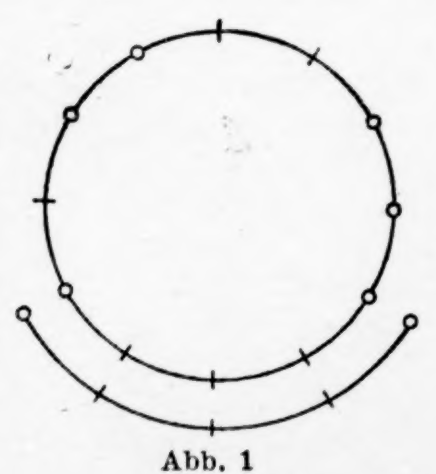


Abb. 1

2. Grundsätzliche Lösung. Es ist durchaus nicht schwer, einen Weg anzugeben, auf dem man den Wert der Wahrscheinlichkeitsfunktion $w_n(x)$ zu irgend einem gegebenen Wertsystem p, x, m, n grundsätzlich finden kann. Von dem Ausgangs-Kollektiv mit der Alternative »Null oder Eins« und den gegebenen Wahrscheinlichkeiten p, q gelangt man durch drei Operationen zu dem End-Kollektiv, dessen Element eine Folge von n Einzelversuchen und dessen Merkmal die Zahl x von Iterationen der Länge m ist.

Erstens hat man aus der unendlichen Folge von Einzelversuchen n »Auswahlen« zu treffen, indem man den ersten, den $(n+1)$ten, den $(2n+1)$ten ....., dann den zweiten, den $(n+2)$ten, den $(2n+2)$ten ....., hierauf den dritten, den $(n+3)$ten, den $(2n+3)$ten ....., schließlich den $n$ten, $2n$ten, $3n$ten .... Versuch zusammenfaßt. Innerhalb jeder der so ausgewählten n unendlichen Reihen sind die Wahrscheinlichkeiten des Auftretens einer Null oder Eins immer noch p und q. Nun verbindet man zweitens diese n Kollektivs miteinander, d. h. man betrachtet als neues Element die Zusammenfassung der n ersten Elemente, der n zweiten Elemente usf. und erhält als Wahrscheinlichkeit eines bestimmten Ergebnisses nach dem bekannten Multiplikationssatz der Wahrscheinlichkeitsrechnung den Wert $p^\alpha q^\beta$, wenn unter den n Einzelresultaten sich α Nullen und β Einser befinden. Hat man z. B. $n=5$, so gibt es $2^5=32$ verschiedene Ergebnisse, von denen die ersten 16 mit ihren Wahrscheinlichkeiten in der folgenden Uebersicht angeführt sind:

00000,	p^5,	0	01000,	p^4q ,	0
00001,	p^4q,	0	01001,	p^3q^2,	1
00010,	p^4q,	0	01010,	p^3q^2,	1
00011,	p^3q^2,	1	01011,	p^2q^3,	1
00100,	p^4q,	0	01100,	p^3q^2,	1
00101,	p^3q^2,	1	01101,	p^2q^3,	1
00110,	p^3q^2,	1	01110,	p^2q^3,	1
00111,	p^2q^3,	1	01111,	pq^4,	0.

Die übrigen 16 entstehen, wenn man Nullen und Einser, also in den Ausdrücken für die Wahrscheinlichkeit p und q, miteinander vertauscht.

Neben die Wahrscheinlichkeitswerte haben wir hier jedesmal die Anzahl der im betreffenden Versuchsergebnis enthaltenen Iterationen zu 2 und zwar nach der zweiten, die zyklische Anordnung voraussetzenden Auffassung, hingeschrieben. Man erkennt, daß nun noch drittens eine »Mischung« erfolgen muß, d. h. daß die Wahrscheinlichkeiten, die rechts den Beisatz 0 zeigen, und die, die den Beisatz 1 aufweisen, je für sich zu addieren sind, damit man für $m=2$ die Werte von w_5 (0) bezw. w_5 (1) erhält. So ergibt sich, wenn man die Vertauschung von p und q berücksichtigt,

$$w_5\ (0) = (p^5 + 4\,p^4q + pq^4) + (q^5 + 4\,q^4p + qp^4) = p^5 + q^5 + 5\,(p^4q + pq^4),$$
$$w_5\ (1) = (6\,p^3q^2 + 4\,p^2q^3) + (6\,q^3p^2 + 4\,q^2p^3) = 10\,(p^2q^3 + q^3p^2).$$

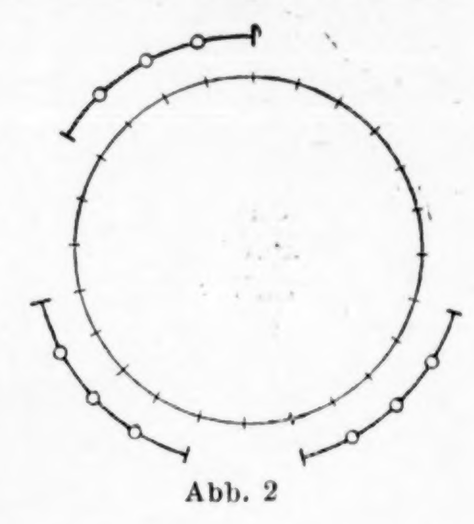
Damit ist die Aufgabe für $n=5$, $m=2$ vollständig gelöst, denn $x>2$ ist hier nicht mehr möglich. Auch für die weiteren noch in Frage kommenden Werte $m=3$, 4, 5 läßt sich die Lösung an Hand der oben gegebenen Uebersicht ohne weiteres finden. Aber wenn n nicht 5, sondern 50 oder 1000 oder noch größer ist, dann versagt dieses Verfahren völlig. Denn wie soll man die 2^{50} oder 2^{1000} möglichen Kombinationen anschreiben und unter ihnen die mit der verlangten Zahl von Iterationen zusammenfassen?

Wir müssen also nach einem andern Weg zur Ermittlung von $w_n(x)$ bei großem n Ausschau halten.

3. Einführung der Momente. Die oben gegebene Uebersicht der möglichen Ergebnisse für $n=5$ ist so gestaltet, daß von dem einen Extremfall 00000 ausgegangen wurde und, wenn man die Zifferngruppen als 5stellige Zahlen liest, diese in arithmetischer Reihenfolge aufsteigen. Daraus folgt, daß jede Kombination sicher nur einmal aufgeschrieben wurde. Wir wollen jetzt eine andere, der Frage nach den Iterationen besser angepaßte Zusammenstellung konstruieren, bei der aber, wie gleich vorangeschickt sei, die Bedingung, daß jede Kombination einmal und nur einmal auftritt, nicht mehr erfüllt ist.

Seien n und m fest gegeben und ν eine Zahl wesentlich kleiner als der Quotient $n:(m+2)$. Dann gibt es sehr viele verschiedene Möglichkeiten, ν Iterationen von der Länge m über n Plätze zu verteilen oder auf n Plätzen aufzustellen. Man denke sich etwa wie früher aus m Nullen und einer vorangestellten und einer nachfolgenden Eins einen »Zug« gebildet und ν derartige Züge von der Länge $m+2$ über die n Plätze so oft verschoben, als es möglich ist, ihnen zu gleicher Zeit verschiedene Stellungen ohne Ueberdeckungen zu geben. Die Abb. 2 zeigt z. B. für $n=24$, $m=3$ eine derartige Aufstellungsmöglichkeit für $\nu=3$ Züge. Jedesmal, wenn eine Stellung feststeht, kann man nun noch einzelne dieser Züge oder auch alle durch ihre Gegenstücke, nämlich Züge aus m Einsern und 2 Nullen ersetzen, und schließlich kann man,

um sämtliche Möglichkeiten zu erschöpfen, auch noch gewisse Ueberdeckungen von Anfangs- und Endelementen zulassen. Z. B. dürfen die Züge (für $m = 3$) 01110 und 01110 soweit zusammenrücken, daß eine Null zwischen ihnen wegfällt und die Züge 01110 und 10001 soweit, daß sie die Gestalt 01110001 annehmen. Wir stellen uns nun vor, daß in einer geeigneten Aufzählung alle Möglichkeiten, ν Iterationen der Länge m auf n Plätzen aufzustellen, erschöpft worden seien; dabei mögen auch alle Kombinationsmöglichkeiten zwischen Nullen- bezw. Einser-Zügen Berücksichtigung gefunden haben.


Abb. 2

Da wir $\nu(m+2)$ kleiner als n vorausgesetzt haben, ist mit der Angabe der Aufstellung und der Art (nämlich, ob Nullen- oder Einser-Iteration) von ν Iterationen noch keinesfalls über das, was an allen n Plätzen steht, verfügt. Wir wollen jetzt annehmen, daß zu jedem Punkt der eben beschriebenen Aufzählung die Elemente an den noch freien, nämlich von den n Zügen nicht besetzten Stellen allen überhaupt möglichen Variationen unterworfen werden. Auf diese Weise entsteht im Ganzen eine Zusammenstellung von Kombinationen von je n Elementen, die teils Nullen, teils Einser sind, eine Zusammenstellung, die folgende Eigenschaften aufweist:

1. In ihr sind nur solche Kombinationen enthalten, die mindestens ν Iterationen der Länge m aufweisen.

2. Eine Kombination mit genau ν Iterationen ist in der Aufzählung nur einmal enthalten.

3. Jede Kombination mit $\nu+1$ Iterationen kommt genau $(\nu+1)$mal in der Aufzählung vor. Denn jede der $\nu+1$ Iterationen kann diejenige sein, die außerhalb der ν zuerst aufgestellten Züge durch die willkürliche Variation der Elemente an den freien Stellen entstanden ist.

4. Jede Kombination mit $\nu+2$ Iterationen kommt genau $\binom{\nu+2}{2}$mal in der Aufzählung vor usf. Denn so viele Möglichkeiten gibt es, zwei Iterationen aus $\nu+2$ auszuwählen, um sie als diejenigen anzusehen, die außerhalb der ν Züge durch Variation der freien Elemente entstanden sind.

Wenn es also gelingt — was wir im nächsten Abschnitt versuchen werden — die Summe S_ν der Wahrscheinlichkeiten aller in der eben beschriebenen Aufzählung enthaltenen Kombinationen zu bilden, so werden wir damit eine Größe gefunden haben, die mit $w_n(x)$ wie folgt zusammenhängt. Es ist

$$S_\nu = w_n(\nu) + (\nu+1)\,w_n(\nu+1) + \binom{\nu+2}{2} w_n(\nu+2)\,\ldots\ldots$$

oder anders geschrieben:

$$S_\nu = \sum_{x=\nu}^{\infty} \binom{x}{\nu} w_n(x) = \frac{1}{\nu!}\sum_{x=0}^{\infty} x(x-1)(x-2)\ldots(x-\nu+1)\,w_n(x) \quad . \quad . \quad (3).$$

In der üblichen Ausdrucksweise ist also S_ν der Erwartungswert oder die »mathematische Hoffnung« der Größe $\binom{x}{\nu}$[1]. Es ist in der Analysis gebräuchlich, den Erwartungswert der Potenzen von x, bezogen auf irgend eine Verteilungsfunktion $w(x)$, als die betreffenden »Momente« von $w(x)$ zu bezeichnen, also

$$M_1 = \sum_{x=0}^{\infty} x\,w(x), \qquad M_2 = \sum_{x=0}^{\infty} x^2 w(x) \ldots\ldots \quad (4).$$

Man erkennt an der zweiten Darstellung von S_ν in (3), daß sich S_ν als lineare Kombination der ersten ν Momente von w_n bilden läßt, und daß die Kenntnis von S_1, S_2 ... bis S_ν gleichwertig ist der Kenntnis von $M_1^{(n)}$, $M_2^{(n)}$ ... bis $M_\nu^{(n)}$, wenn damit die Momente von $w_n(x)$ bezeichnet werden.

4. Abschätzung der S_ν. Wir gehen jetzt dazu über, für die in **3** definierten Wahrscheinlichkeitssummen S_ν obere und untere Schranken anzugeben. Zu diesem Zweck sei folgendes vorweg bemerkt.

[1]) Wobei das Symbol $\binom{x}{\nu}$ für $x < \nu$ null bedeuten soll.

Wenn man an α von n Stellen des Versuchsergebnisses Nullen setzt, an weiteren β Stellen Einser, die Elemente an den übrigen $n-(\alpha+\beta)$ Stellen aber alle möglichen Kombinationen durchlaufen läßt, so ist die Summe der Wahrscheinlichkeiten aller dieser Ergebnisse gleich $p^\alpha q^\beta$. Denn aus den sämtlichen Produkten von n Faktoren, die nach dem Multiplikationssatz die Wahrscheinlichkeiten der verschiedenen Ergebnisreihen darstellen (s. oben unter **2**), hebt sich $p^\alpha q^\beta$ heraus und, was in der Klammer bleibt, ist die Gesamtheit aller möglichen Produkte aus $n-(\alpha+\beta)$ Faktoren p oder q, also gerade der Ausdruck $(p+q)^{n-\alpha-\beta}$, der den Wert 1 hat. Demnach kann man S_ν so bilden, daß man jede Aufstellungsmöglichkeit der ν Züge einmal in Betracht zieht und als ihre Wahrscheinlichkeit ein bestimmtes Produkt aus so viel Faktoren, als die Züge Stellen besetzen (im Höchstfall ν mal $m+2$, bei isolierten Aufstellungen) in die Rechnung einsetzt.

Wenn wir zunächst eine untere Schranke für S_ν suchen, so dürfen wir einen Teil der Summanden weglassen und wir wollen daher für diesen Zweck nur die isolierten, d. h. von Ueberdeckungen freien, Aufstellungen von ν Zügen berücksichtigen. Es sei z_ν die Anzahl der örtlich verschiedenen Aufstellungen, also allgemein gesprochen die Zahl der Möglichkeiten, unter n Plätzen ν zusammenhängende Gruppen von $m+2$ Plätzen ohne Ueberdeckungen auszuwählen. Benutzt man jede dieser Möglichkeiten nur dazu, um ν Einser-Züge aufzustellen, so erhält man zu S_ν den Beitrag $z^\nu (p^2 q^m)^\nu$. Da man aber jedesmal alle $\binom{\nu}{2}$ Kombinationen von Nullen- und Einser-Zügen durchführen kann, so erhält man als Summe der Wahrscheinlichkeiten für alle in unserer Aufzählung aneinandergereihten Kombinationen mit ν isolierten Iterationen

$$z_\nu (p^2 q^m + p^m q^2)^\nu \leqq S_\nu \quad \ldots \ldots \ldots \quad (5).$$

Für die Anzahl z_ν lassen sich leicht obere und untere Grenzen angeben. Vor allem ist $z_1 = n$ (zufolge der zyklischen Anordnung), nämlich die Zahl der Aufstellungs-Möglichkeiten eines einzelnen Zuges der Länge $m+2$. Hat man nun irgend eine der $z_{\nu-1}$ Aufstellungen von $\nu-1$ Zügen, so kann man aus ihr soviele Aufstellungen von ν Zügen ableiten, als sich Verschiebungsmöglichkeiten für einen ν-ten Zug auf den $n-(\nu-1)(m+2)$ freien Plätzen finden. Der güngstigste Fall liegt offenbar dann vor, wenn die $\nu-1$ ersten Züge dicht aneinandergeschoben sind — es bleiben dann für den ν-ten Zug genau $n-(\nu-1)(m+2)-(m+1)$ Möglichkeiten —, der ungünstigste tritt dann ein, wenn überall zwischen zwei Zügen je $m+1$ Plätze unverwendbar bleiben — man hat dann noch um $(\nu-2)(m+1)$ Aufstellungen weniger. Zu beachten ist hierbei, daß jede Anordnung von ν Zügen hier ν mal in Rechnung gestellt erscheint, da man jeden der ν Züge als den ν-ten, zu den $\nu-1$ anderen hinzukommenden, auffassen kann. Demnach besagt die vorstehende Ueberlegung, daß

$$n-(\nu-1)(2m+3) \leqq \frac{\nu z_\nu}{z_{\nu-1}} \leqq n-(\nu-1)(m+2)-(m+1) \quad \ldots \quad (6).$$

In Zusammenhang mit $z_1 = n$ folgt daraus

$$\frac{n^\nu}{\nu!} I_1 \leqq z_\nu \leqq \frac{n^\nu}{\nu!} I_2 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (7),$$

mit

$$\left.\begin{aligned} I_1 &= \left(1-\frac{2m+3}{n}\right)\left(1-2\,\frac{2m+3}{n}\right)\ldots\left(1-(\nu-1)\,\frac{2m+3}{n}\right) \\ I_2 &= \left(1-\frac{2m+3}{n}\right)\left(1-\frac{3m+5}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{\nu m+2\nu-1}{n}\right) \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (7').$$

Die beiden Schranken für z_ν fallen also, wenn n gegen ∞ geht, ν konstant bleibt und m zumindest nicht in demselben Maße wie n anwächst, zusammen.

Es ist jetzt auch nicht schwer, eine obere Schranke für S_ν zu finden. Die Gesamtzahl aller Aufstellungsmöglichkeiten von ν Zügen (einschließlich der mit zulässigen Ueberdeckungen) kann sicher nicht größer sein als $\binom{n}{\nu}$. Denn dies ist die Anzahl der Kombinationen zu ν aus n Elementen, also gleich der Zahl der möglichen Aufstellungen, wenn überhaupt jede Ueberdeckung zugelassen wird. Es können somit zu den früher betrachteten höchstens noch $\binom{n}{\nu} - z_\nu$ Summanden hinzukommen. Sehen wir zu, welchen Wert ein solcher Summand im Maximum annehmen kann. Es ist ein Produkt aus Faktoren, die sämtlich kleiner als 1 sind und deren Zahl mindestens $m\nu$ beträgt (dies

nur dann, wenn ohne Unterbrechung eine Iteration auf die nächste folgt). Setzen wir voraus, daß p die größere der beiden Zahlen p und q ist, sofern nicht beide gleich sind,

$$p \geqq q \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (8),$$

so ist also sicher kein Summand größer als $p^{m\nu}$, demnach

$$S_\nu \leqq z_\nu\, p^2 q^m + p^m q^2)^\nu + \left[\binom{n}{\nu} - z_\nu\right] p^{m\nu} \quad \ldots \ldots \quad (9).$$

Für $\nu = 1$ fallen die beiden Grenzen (5) und (9) zusammen und geben

$$S_1 = n\,(p^2 q^m + p^m q^2) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (10).$$

Andrerseits ist nach (3)

$$S_1 = \sum_{x=0}^{\infty} x\, w_n(x) = a \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (10'),$$

wenn wir mit a die Erwartungszahl der Iterationen von der Länge m bezeichnen. Führt man a in (5) und (9) ein und berücksichtigt (7), so erhält man endgültig

$$\frac{a^\nu}{\nu!} I_1 \leqq S_\nu \leqq \frac{a^\nu}{\nu!} I_3 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (11),$$

wo I_1 durch (7'), I_3 durch

$$I_3 = I_2 + \left(\frac{p^m}{p^m q^2 + p^2 q^m}\right)^\nu \left[\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) \ldots \left(1 - \frac{\nu - 1}{n}\right) - \left(1 - \frac{2m+3}{n}\right) \ldots \left(1 - (\nu - 1)\frac{2m+3}{n}\right)\right] \quad (11')$$

gegeben ist. Da der Ausdruck in der eckigen Klammer mit wachsendem n gegen null geht, streben sowohl I_2 als I_3 gegen 1, d. h. die angegebenen Schranken für S_ν beide gegen $a^\nu : \nu!$

5. Die Poissonsche Funktion. Poisson hat in seinen »Recherches sur la probabilité des jugements« (1837) gezeigt, daß der bekannte Newtonsche Ausdruck für die Wahrscheinlichkeit der x-fachen Wiederholung eines Ereignisses bei n Versuchen übergeht in die Funktion

$$w(x) = \frac{e^{-a} a^x}{x!} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (12),$$

wenn n ins Unendliche wächst, die Wahrscheinlichkeit p des Einzelfalles aber so klein wird, daß die Erwartungszahl $np = a$ noch endlich bleibt. Unsere Frage nach der Wahrseheinlichkeit des Auftretens von x Iterationen bestimmter Länge in einer großen Serie von n Versuchen weist, wenn wir uns auf nicht zu kurze Iterationen beschränken, eine gewisse Analogie mit dem Poissonschen Problem auf. Auch bei uns handelt es sich um die Wiederholungszahl »seltener Ereignisse«; die möglichen Werte von x reichen sehr weit hinauf, bis gegen $n : m$, aber nur kleine, bei null liegende Werte haben merkliche Wahrscheinlichkeiten und demgemäß ist auch die Erwartungszahl recht klein. Daher habe ich bei einer früheren Gelegenheit[1]) die Vermutung ausgesprochen, es könnte die oben definierte Funktion $w_n(x)$ mit wachsendem n in die Poissonsche übergehen. Die voranstehenden Ueberlegungen sind, wie wir gleich sehen werden, sehr geeignet, diese Vermutung zu stützen, und die abschließenden Bemerkungen des folgenden Abschnittes werden zeigen, daß es möglich ist, die Behauptung

$$\lim_{n=\infty} w_n(x) = w(x) = \frac{e^{-a} a^x}{x!} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (13)$$

in völliger Strenge zu begründen.

Bildet man nämlich für die Poissonsche Funktion (12) die in (3) definierten Summen S_ν, so erhält man

$$\sum_{x=\nu}^{\infty} \binom{x}{\nu} w(x) = \frac{e^{-a}}{\nu!} \sum_{x=\nu}^{\infty} \frac{a^x}{(x-\nu)!} = \frac{a^\nu e^{-a}}{\nu!} \sum_{z=0}^{\infty} \frac{a^z}{z!} = \frac{a^\nu}{\nu!} \quad \ldots \quad (14).$$

Denn die im dritten Glied stehende Summe ist nichts anderes als die Entwicklung von e^a nach Potenzen von a. Für $\nu = 1$ bestätigt (14) nur die Tatsache, daß der Mittelwert von $w(x)$ oder der Erwartungswert von x gleich a ist. Nun ist schon im Anschluß an (11) gesagt worden, daß die für die einzelnen $w_1(x)$, $w_2(x) \ldots w_n(x) \ldots$ gebildeten Summen S_ν bei festem ν und unbeschränkt wachsendem n gegen eben die Ausdrücke rechts in (14) konvergieren. Andrerseits wissen wir (3), daß die Angabe von S_1, $S_2 \ldots$

[1]) Die Naturwissenschaften, 7, 1919, S. 207.

bis S_ν für irgend eine Verteilungsfunktion völlig gleichbedeutend ist mit der Angabe der ersten ν Momente dieser Funktion. Mithin können wir das Ergebnis unserer bisherigen Untersuchung dahin zusammenfassen: Wie groß auch ν sei, es läßt sich immer ein so großes n_0 finden, daß für alle $n > n_0$ der Unterschied zwischen einem der ersten ν Momente von $w_n(x)$ und dem betreffenden Moment von $w(x)$ kleiner wird als ein beliebig vorgegebener Betrag ε. Oder kürzer: Die Momente der von uns gesuchten Wahrscheinlichkeiten $w_n(x)$ konvergieren gleichmäßig gegen die Momente der Poissonschen Funktion.

Bevor wir die Frage erörtern, wie weit man aus der Konvergenz der Momente auf die der Funktionen selbst schließen kann, sei noch folgendes bemerkt. Wir sind ursprünglich davon ausgegangen, die Wahrscheinlichkeit für eine bestimmte Länge m der Iterationen zu suchen. In Gl. (11) tritt aber nicht mehr m, sondern die Erwartungszahl a der Iterationen als Parameter auf. Es folgt daraus, daß diese Größe, und nicht m, beim Grenzübergang festzuhalten ist, was sich im allgemeinen der notwendigen Ganzzahligkeit von m wegen nicht für jedes n realisieren läßt. Ein Beispiel wird uns sofort klar machen, welche Bedeutung dies hat. Sei etwa $p = q = 1/2$ angenommen, dann ist nach (10) und (10')

$$a = n\left(\frac{1}{2^{m+2}} + \frac{1}{2^{m+2}}\right) = \frac{n}{2^{m+1}}.$$

Man muß also hier beim Uebergang zu größeren Serienlängen das n immer auf das Doppelte des vorangehenden Wertes springen lassen und dabei m um eine Einheit erhöhen. Sind p und q irrational, so muß man das Wachsen von n und m so regulieren, daß sich der Ausdruck rechts in (10) einem bestimmten Grenzwert nähert. (Ein ganz ähnlicher Fall liegt beim bekannten Uebergang von der Newtonschen Formel zur Laplaceschen vor, wo der Quotient $x : \sqrt{n}$ konstant zu halten, bezw. zu approximieren ist.) Praktisch spielt diese ganze Frage gar keine Rolle, denn die Anwendung, die von Gl. (13) — wenn sie bewiesen ist — gemacht werden kann, besteht doch nur (analog dem Laplaceschen Fall) in der Aussage, daß annähernd für große n

$$w_n(x) \sim w(x) = \frac{e^{-a} a^x}{x!}$$

gilt, wobei nur hinzuzusetzen ist: bei endlichem Erwartungswert a.

Um über die Richtigkeit von (13) zu entscheiden, muß man noch die Momente von $w(x)$ selbst, wenigstens ihrer Größenordnung nach, abschätzen. Nun kann man ja die Folge der Momente aus der bereits nach (14) bekannten Folge der S_ν berechnen, indem man die für $\nu = 1, 2, 3 \ldots.$ aus (14) und der Definition der Momente (4) hervorgehenden Gleichungen

$$\left.\begin{array}{l} \Sigma x\, w(x) = M_1 = a \\ \Sigma x(x-1)\, w(x) = M_2 - M_1 = a^2 \\ \Sigma x(x-1)(x-2)\, w(x) = M_3 - 3M_2 + 2M_1 = a^3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \quad \ldots \quad (15),$$

nach den $M_1, M_2, M_3 \ldots$ auflöst. Rascher führt aber der folgende Weg zum Ziel. Man differenziert die Definitionsgleichung für M_ν:

$$\frac{dM_\nu}{da} = \frac{d}{da}\Sigma x^\nu \frac{e^{-a} a^x}{x!} = \Sigma\left(\frac{x}{a} - 1\right) x^\nu w(x) = \frac{1}{a} M_{\nu+1} - M_\nu \quad \ldots \quad (16).$$

Setzt man, wie es schon die Form der Gleichung (15) nahelegt, M_ν als Polynom ν-ten Grades in a mit unbestimmten Koeffizienten an:

$$M_\nu = c_{0,\nu} + c_{1,\nu}\, a + c_{2,\nu}\, a^2 + \ldots . c_{\nu,\nu}\, a^\nu \quad \ldots\ldots \quad (17),$$

so folgt aus (16) die Rekursionsformel

$$c_{\varkappa,\nu+1} = \varkappa c_{\varkappa,\nu} + \nu c_{\varkappa-1,\nu-1} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (17').$$

Bedenkt man, daß alle c positiv sind und $\varkappa \leqq \nu$, so kann man aus (17') schließen:

$$c_{\varkappa,\nu+1} \geqq \nu\,(c_{\varkappa,\nu} + c_{\varkappa-1,\nu})$$

und für die Quotienten $c_{\varkappa,\nu} : (\nu-1)! = c'_{\varkappa,\nu}$:

$$c'_{\varkappa,\nu+1} \geqq c'_{\varkappa,\nu} + c'_{\varkappa-1,\nu}.$$

Eine solche Beziehung — nur mit den Gleichheitszeichen — charakterisiert bekanntlich die Binomialzahlen, und da bei diesen ebenso wie hier, für $\nu = 0$ der einzige

nicht verschwindende Koeffizient $c'_{0,0} = 1$ ist (für $\varkappa < 0$ und $\varkappa > \nu$ muß man sich nötigenfalls Nullen als Koeffizienten eingesetzt denken), so hat man:

$$c'_{\varkappa,\nu} = \frac{c_{\varkappa,\nu}}{(\nu-1)!} \leqq \binom{\nu}{\varkappa}$$

und nach (17) $$M_\nu \leqq (\nu-1)!\,(1+a)^\nu \quad \text{. . . . . (18).}$$

Das ist die Abschätzung der M_ν, von der wir im folgenden Gebrauch machen werden.

6. Konvergenzbeweis. Das Ergebnis aus der Analysis, dessen wir uns zum Beweis der Gl. (13), also zum Nachweis der behaupteten Konvergenz der $w_n(x)$ gegen die Poissonsche Funktion, bedienen, ist folgendes. Es sei $v(\xi)$ eine nicht negative, für alle positiven Werte von ξ definierte Funktion, deren Momente

$$M_\nu' = \int_0^\infty \xi^\nu v(\xi)\,d\xi \qquad (\nu = 0, 1, 2 \ldots .) \quad \text{. . . . . . . (19)}$$

mit wachsendem ν nicht stärker anwachsen als die ν te Potenz eines endlichen Vielfachen von ν, so daß

$$\frac{\sqrt[\nu]{M_\nu'}}{\nu} < A \quad \text{. . . . . (19'),}$$

wo A irgend ein endlicher Wert. Wenn dann die unendliche Folge nicht negativer Funktionen $v_1(\xi)$, $v_2(\xi)$, $v_3(\xi)$ . . . . die Eigenschaft besitzt, daß

$$\lim_{n=\infty} \int_0^\infty \xi^\nu v_n(\xi)\,d\xi = M_\nu', \qquad (\nu = 0, 1, 2 \ldots .) \quad \text{. . . . . . (20),}$$

so folgt daraus, daß das unbestimmte Integral von $v_n(\xi)$ gegen das von $v(\xi)$ gleichmäßig konvergiert:

$$\lim_{n=\infty} \int_0^x v_n(\xi)\,d\xi = \int_0^x v(\xi)\,d\xi \quad \text{. . . . . (20')}$$

Dieser Satz, der sich aus verschiedenen neueren Untersuchungen über das Momentenproblem gewinnen läßt, ist insbesondere von G. Pólya in ähnlicher Form ausgesprochen worden[1]).

Um dies Ergebnis für uns nutzbar zu machen, ordnen wir jeder der oben definierten Wahrscheinlichkeitsfunktionen $w_n(x)$, die für alle positiven ganzzahligen x definiert sind, eine für alle positiven Werte definierte Funktion $v_n(\xi)$ durch

$$v_n(\xi) = 1 - \sum_{x \leqq \xi} w_n(x) \quad \text{. . . . . (21)}$$

zu. Ausführlicher geschrieben lautet (21):

$$\begin{aligned} v_n(\xi) &= 1 - w_n(0) && \text{für } 0 < \xi \leqq 1, \\ &= 1 - w_n(0) - w_n(1) && \text{für } 1 < \xi \leqq 2 \\ &= 1 - w_n(0) - w_n(1) - w_n(2) && \text{für } 2 < \xi \leqq 3 \text{ usf.,} \end{aligned}$$

d. h. v_n ist innerhalb der Einzelstrecken von der Länge 1 konstant und nimmt dann jedesmal um den betreffenden Wert von w_n, im ganzen von 1 bis 0 ab. Analog soll $v(\xi)$ aus der Poissonschen Funktion $w(x)$ abgeleitet werden. (Vergl. Abb. 3, wo $w(x)$, $v(\xi)$ und das unbestimmte Integral von $v(\xi)$ eingezeichnet ist.) Das ν te Moment von $v(\xi)$ ist nach (19):

$$\left.\begin{aligned} M_\nu' &= \int_0^1 \xi^\nu [1 - w(0)]\,d\xi + \int_1^2 \xi^\nu [1 - w(0) - w(1)]\,d\xi + \ldots . . \\ &= \frac{1}{\nu+1}\left[1^{\nu+1}(1 - w(0)) + (2^{\nu+1} - 1^{\nu+1})(1 - w(0) - w(1)) + \ldots .\right] \\ &= \frac{1}{\nu+1}\left[1^{\nu+1} w(1) + 2^{\nu+1} w(2) + \ldots . .\right] = \frac{1}{\nu+1} M_{\nu+1} \end{aligned}\right\} \text{(22),}$$

wo M_ν wie früher das ν te Moment von $w(x)$ bedeutet. Setzt man die Abschätzung (18) für M_ν hier ein, so erhält man

$$M_\nu' < \frac{\nu!\,(1+a)^{\nu+1}}{\nu+1} < [\nu(1+a)]^\nu \quad \text{. . . . . . . (23),}$$

[1]) Math. Zeitschr. 8, 1920, 171—181.

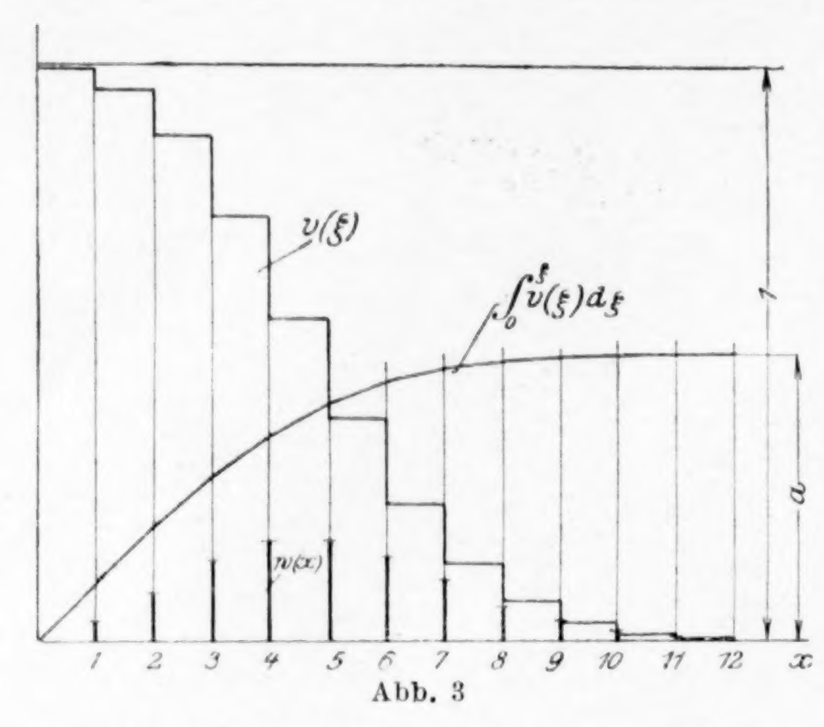


Abb. 3

so daß die Bedingung (19') erfüllt erscheint. Andrerseits stehen die Momente der $v_n(\xi)$ mit den Momenten der $w_n(x)$ in dem gleichen Zusammenhang, den (22) zum Ausdruck bringt, d. h. sie verschieben sich jedesmal um 1 im Index und sind durch den Faktor $1:(\nu+1)$ erweitert. Die Konvergenz des ν-ten Momentes der $w_n(x)$ gegen M_ν ist gleichbedeutend mit der des $(\nu+1)$ten Momentes von $v_n(\xi)$ gegen M'_{n+1}, womit (20) gegeben wird. Daraus folgt, daß auch (20') für unsere in (21) definierten Funktionen $v_n(\xi)$ besteht.

Die in (20') auftretenden unbestimmten Integrale der $v_n(\xi)$ und von $v(\xi)$ sind nach (21) Polygone, deren Ecken ganzzahlige Abszissen haben und die monoton vom Nullpunkt bei $\xi = 0$ bis zur Höhe a ansteigen. Wenn eine Folge solcher Polygone $P_1, P_2, P_3 \ldots$ gegen ein bestimmtes Polygon P gleichmäßig konvergiert, so muß auch die Neigung der x-ten Polygonseite der $P_1, P_2, P_3 \ldots$ gegen die Neigung der x-ten Seite von P streben. Da die Neigungen aber nichts anderes sind als die w-Werte, so ist damit der Nachweis für Gl. (13) erbracht. Wir können das Gesamtergebnis so zusammenfassen:

Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß in einer Reihe von n Wiederholungen eines einfachen Alternativ-Versuches x Iterationen von der Erwartungszahl a auftreten, nähert sich mit wachsendem n mehr und mehr dem Poissonschen Ausdruck:

$$\lim_{n=\infty} w_n(x) = w(x) = \frac{e^{-a} a^x}{x!} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (24).$$

Für die praktische Anwendung wird man, wie dies z. B. beim Bernoulli-Laplaceschen Gesetz geschieht, bei großem n und verhältnismäßig kleinen a einfach $w(x)$ für $w_n(x)$ einsetzen dürfen.

7. Vergleich mit der Beobachtung. Die umfassendste Beobachtungsreihe, die zur Prüfung der Theorie der Iterationen bisher angestellt wurde, ist die Untersuchung von K. Marbe über das Geschlechtsverhältnis der Geburtseintragungen in den Standesamtslisten von vier bayerischen Städten. Es wurden hier vier Versuche mit $n = 49\,152$ vorgenommen und alle Iterationen der Längen $m = 1$ bis $m = 17$ (längere kamen nicht vor) gezählt. Die Uebereinstimmung zwischen Rechnung und Beobachtung scheint schon dann eine sehr gute zu sein, wenn man ohne Rücksicht auf die im vorstehenden entwickelte Theorie bloß die beobachteten Iterationszahlen den berechneten Erwartungszahlen gegenüberstellt. Die folgende Zahlentafel gibt nach Marbes Angaben (Bd. 1, S. 289 — 293) für jedes m die vier beobachteten Zahlen und ihr arithmetisches Mittel, dazu den nach (10), (10') berechneten Erwartungswert a; dabei ist als Einzelwahrscheinlichkeit der Wert $p = 0{,}48901$ zugrunde gelegt, der sich als relative Häufigkeit der Eintragungen weiblicher Geburten innerhalb aller rd. 200 000 Fälle ergibt.

Länge m =	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
Würzburg. .	12 305	6184	3174	1489	780	362	187	98	41	23	9	7	3	0	1	0	0
Fürth	12 028	6156	3156	1580	735	397	186	102	58	21	16	6	3	0	2	0	0
Augsburg . .	12 154	6090	3086	1536	813	395	202	94	44	31	13	8	3	1	0	0	1
Freiburg . .	12 136	6052	3134	1564	761	379	197	118	40	22	12	5	5	0	1	0	0
Durchschnitt	12 156	6121	3138	1542	772	383	193	103	45,8	24,3	12,5	6,5	3,5	0,25	1	0	0,25
Erwartungszahl a . .	12 282	6138	3069	1535	768	385	193	97	48,4	24,3	12,2	6,12	3,08	1,54	0,78	0,39	0,20

Trotz der überraschend guten Uebereinstimmung der Zahlen in den beiden letzten Zeilen findet Marbe doch das Zurückbleiben der wirklichen Iterationszahl hinter der zu erwartenden bei großem m auffallend. Insbesondere ist für $m = 16$ und für $m \geqq 18$ keine einzige Iteration aufgetreten, während die Erwartungszahl jedenfalls größer als Null war. Hier kann nun das Ergebnis, das in Gl. (24) zum Ausdruck gebracht wurde, zur Verwendung kommen. Man erhält für $m = 16$, $a = 0{,}391$

$$w(0) = 0{,}68, \quad w(1) = 0{,}26, \quad w(2) = 0{,}05 \; .\; .\; .\; .\; .$$

dann für $m = 18$, $a = 0{,}098$

$$w(0) = 0{,}907, \quad w(1) = 0{,}089, \quad w(2) = 0{,}005 \; .\; .\; .\; .\; .$$

Daran erkennt man, daß das Eintreten keiner Iteration der Länge 16 mit einer Wahrscheinlichkeit von 68 vH zu erwarten war; man kann es unmöglich als auffallend oder ungewöhnlich bezeichnen, daß in einer Folge von vier Versuchen jedesmal das Ereignis eintritt, für das eine Wahrscheinlichkeit von 0,68 besteht. Noch günstiger liegen die Fälle $m \geqq 18$. Hier beträgt für $m = 18$ nicht nur die Einzelwahrscheinlichkeit für das Fehlen der Iteration nahezu 91 vH, sondern man findet auch mit $[w(0)]^4 = 0{,}68$, daß das viermalige Fehlen der Iteration von der Länge $m = 18$ mit mehr als $^2/_3$ Wahrscheinlichkeit zu erwarten stand. Vergleicht man diesen Wert mit der Wahrscheinlichkeit für das Auftreten einer Iteration $4\, w(1)\, [w(0)]^3 = 0{,}27$ und bedenkt, daß bei wachsendem m der Wert von $w(0)$ immer stärker überwiegt, so erkennt man: Die tatsächlich beobachtete Erscheinung, daß keine Iteration von größerer Länge als 17 auftrat, ist jedesmal die theoretisch wahrscheinlichste unter allen möglichen Kombinationen Bei $m = 16$ kommt dem viermaligen Fehlen der Iterationen die Wahrscheinlichkeit 0,21, dem einmaligen Erscheinen einer Iteration die Wahrscheinlichkeit 0,32 zu. 83

Über algebraische Gleichungen, die nur Wurzeln mit negativen Realteilen besitzen.

Von **J. SCHUR** in Berlin.

Bei verschiedenen Anwendungen, insbesondere bei den Stabilitätsproblemen der Mechanik, wird man auf die Aufgabe geführt, zu entscheiden, unter welchen Bedingungen eine algebraische Gleichung

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

mit reellen Koeffizienten die Eigenschaft besitzt, daß die Realteile ihrer Wurzeln x_1, x_2, $\ldots$, x_n sämtlich negativ sind[1]. Als notwendig erweist es sich, daß alle a_ν gleiches Vorzeichen haben, und für $n = 2$ ist diese Bedingung auch hinreichend. Dies folgt unmittelbar aus der Zerlegung von $f(x)$ in lineare und quadratische reelle Faktoren. Eine Lösung unserer Aufgabe für Gleichungen beliebigen Grades hat Routh a. a. O. mit Hilfe der Cauchyschen Indextheorie entwickelt. Etwas später ist A. Hurwitz[2]) durch Betrachtung einer gewissen quadratischen Form auf ein besonders einfaches und elegantes Kriterium geführt worden, das folgendermaßen lautet: Nimmt man den Koeffizienten a_0 als positiv an, so sind die Realteile der Wurzeln der Gleichung (1) dann und nur dann sämtlich negativ, wenn die n Determinanten

$$D_1 = a_1, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix}, \quad \ldots, \quad D_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & \ldots & 0 \\ . & . & . & . & . \\ a_{2n-1} & a_{2n-2} & a_{2n-3} & \ldots & a_n \end{vmatrix}$$

sämtlich positiv ausfallen. Hierbei hat man a_ν für $\nu > n$ gleich Null zu setzen.

Einen elementareren Beweis für den Hurwitzschen Satz, der nur von einfachen Sätzen über Resultanten Gebrauch macht, hat L. Orlando[3]) angegeben. Er geht hierbei

[1]) Vergl z. B. E J. Routh, A treatise on the stability of a given state of mo ion, London 1877, S. 74 bis 81; auch: Die Dynamik der Systeme starrer Körper, Deutsche Ausgabe Bd. II, Leipzig 1898, S. 222 bis 234.

[2]) A. Hurwitz, Math. Ann. Bd. 46 (1895), S. 273 bis 284.

[3]) L. Orlando, Math. Ann. Bd. 71 (1912), S. 233 bis 245.

von der an und für sich interessanten und überaus leicht zu beweisenden Bemerkung aus, daß die Gleichung (1) dann und nur dann die verlangte Eigenschaft besitzt, wenn die Gleichung des Grades $\binom{n}{2}$, der die $\binom{n}{2}$ Summen $x_\varkappa + x_\lambda$ $(\varkappa < \lambda)$ genügen, lauter positive Koeffizienten aufweist. Erwähnt seien auch noch zwei Noten des Herrn Chipard und Liénard[1]). Hier wird mit Hilfe der Theorie der quadratischen Formen ein ähnliches Kriterium wie das Hurwitzsche abgeleitet, ohne daß die Hurwitzsche Arbeit zitiert wird.

Im folgenden will ich auf einen neuen Zugang zum Hurwitzschen Kriterium aufmerksam machen, der mir besonders einfach zu sein scheint.. Ich gelange zu dem Hurwitzschen Satz auf dem Umweg über zwei andere Kriterien, die beide für die Praxis bereits völlig ausreichend sind. Sie haben noch den Vorzug, daß sie auch für Gleichungen mit komplexen Koeffizienten ihre Geltung behalten.

Zur Abkürzung werde ich im folgenden eine Gleichung mit reellen oder komplexen Koeffizienten, deren Wurzeln lauter negative Realteile besitzen, als eine Hurwitzsche Gleichung bezeichnen.

1. Eine Hilfsbetrachtung. Jedem Polynom

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$$

mit reellen oder komplexen Koeffizienten ordne ich das Polynom

$$f^*(x) = \bar{a}_0 - \bar{a}_1 x + \bar{a}_2 x^2 - \ldots + (-1)^n \bar{a}_n x^n$$

zu. Hierbei soll wie üblich das Ueberstreichen der a_ν den Uebergang zu den konjugiert komplexen Größen andeuten, so daß, wenn die ursprüngliche Gleichung nur reelle Koeffizienten hat, das Polynom f^* sich lediglich in den Vorzeichen jedes zweiten Gliedes von f unterscheidet. Sind dann $x_1, x_2, \ldots x_n$ die Wurzeln von $f(x) = 0$, ist also

$$f(x) = a_n \prod_{\nu=1}^{n} (x - x_\nu) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (2),$$

so wird, da für $f = gh \ldots$ offenbar auch $f^* = g^* h^* \ldots$ wird,

$$f^*(x) = \bar{a}_n \prod_{\nu=1}^{n} (-x - \bar{x}_\nu) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (3).$$

Sind nun $u, v; u_\nu, v_\nu$ $(\nu = 1, 2 \ldots n)$ reelle Größen und setzen wir

$$x = u + i v, \quad x_\nu = u_\nu + i v_\nu,$$

so wird

$$|x + \bar{x}_\nu|^2 - |x - x_\nu|^2 = 4 u u_\nu.$$

Für ein negatives u_ν entsprechen daher die drei möglichen Fälle

$$|x - x_\nu| < |x + \bar{x}_\nu|, \quad |x - x_\nu| > |x + \bar{x}_\nu|, \quad |x - x_\nu| = |x + \bar{x}_\nu|$$

den drei Fällen

$$u < 0, \quad u > 0, \quad u = 0.$$

Aus (2) und (3) folgt also unmittelbar: Ist $f(x) = 0$ eine Hurwitzsche Gleichung, so wird[2])

$$\left.\begin{array}{l} 0 \leqq |f(x)| < |f^*(x)| \text{ für } \Re(x) < 0 \\ 0 \leqq |f^*(x)| < |f(x)| \text{ für } \Re(x) > 0 \\ 0 < |f(x)| = |f^*(x)| \text{ für } \Re(x) = 0 \end{array}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (4).$$

Auf Grund dieser Ungleichungen ergibt sich nun leicht der Hilfssatz: Sind α und β zwei reelle oder komplexe Größen und ist $|\alpha| > |\beta|$, so ist $f(x) = 0$ dann und nur dann eine Hurwitzsche Gleichung, wenn die Gleichung

$$g(x) = \alpha f(x) - \beta f^*(x) = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (5)$$

diese Eigenschaft besitzt.

Denn ist $f(x) = 0$ eine Hurwitzsche Gleichung, so wird für $\Re(x) \geqq 0$

$$|\alpha f(x)| > |\beta f^*(x)|.$$

Daher kann für ein solches x nicht $\alpha f(x) = \beta f^*(x)$ sein. Ferner folgt aus (5)

$$g^*(x) = \bar{\alpha} f^*(x) - \bar{\beta} f(x) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (6).$$

[1]) Comptes Rendus, Paris, Bd 157 (1913), S. 691 bis 694 und S. 835 bis 840. Vergl. hierzu M. Fujiwara, The Tôkoku Math. Journ., 1915, Bd. 8, S. 78 bis 82.

[2]) Für Gleichungen, deren Wurzeln sämtlich positive Imaginärteile besitzen, findet sich eine ähnliche Bemerkung bei Laguerre, Oeuvres, Bd. I., S. 360

Die Elimination von $f^*(x)$ aus (5) und (6) liefert aber

$$f(x) = \alpha_1 g(x) - \beta_1 g^*(x),$$

wobei

$$\alpha_1 = \frac{\bar{\alpha}}{|\alpha|^2 - |\beta|^2}, \quad \beta_1 = -\frac{\beta}{|\alpha|^2 - |\beta|^2}$$

zu setzen ist. Da auch $|\alpha_1| > |\beta_1|$ ist, so ist die Beziehung zwischen $f(x)$ und $g(x)$ eine reziproke.

2. Das erste Kriterium. Ist nun $f(x) = 0$ eine **Hurwitzsche** Gleichung und bedeutet ξ irgend eine komplexe Zahl mit negativem Realteil, so wird wegen (4)

$$|f^*(\xi)| > |f(\xi)| \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (7).$$

Daher ist auf Grund unseres Hilfssatzes auch

$$g(x) = f^*(\xi) f(x) - f(\xi) f^*(x) = 0$$

eine **Hurwitzsche** Gleichung. Diese Gleichung hat aber die Wurzel $x = \xi$. Folglich ist auch

$$f_1(x) = \frac{g(x)}{x - \xi} = 0$$

eine algebraische Gleichung mit lauter Wurzeln von negativem Realteil. Weiß man umgekehrt, daß $f_1(x) = 0$ eine **Hurwitzsche** Gleichung ist, so gilt dasselbs auch für $g(x) = 0$. Kommt noch hinzu, daß ξ der Bedingung (7) genügt, so ergibt sich aus dem Hilfssatz, daß auch $f(x) = 0$ eine **Hurwitzsche** Gleichung ist. Dies liefert aber den Satz:

Es sei ξ eine beliebige, fest gewählte Größe mit negativem Realteil. Die Gleichung n-ten Grades $f(x) = 0$ ist dann und nur dann eine Hurwitzsche Gleichung, wenn $f(\xi)$ von kleinerem absoluten Betrage als $f^*(\xi)$ ausfällt und die Gleichung des Grades $n-1$

$$f_1(x) = \frac{f^*(\xi) f(x) - f(\xi) f^*(x)}{x - \xi} = 0$$

eine Hurwitzsche Gleichung ist[1].

Da man dieses Reduktionsverfahren auch auf die Gleichung $f_1(x) = 0$ und die sich aus ihr ergebenden weiteren Gleichungen anwenden kann, so wird man in jedem Fall nach höchstens $n-1$, bei reellen Koeffizienten nach $n-2$ Schritten entscheiden können, ob $f(x) = 0$ eine **Hurwitzsche** Gleichung ist oder nicht. Hierbei kann man sich bei der Fortsetzung des Verfahrens entweder jedesmal derselben Größe ξ oder auch eines Systems von beliebig vorgeschriebenen Größen $\xi, \xi_1, \ldots$ mit lauter negativen Realteilen bedienen.

Sei z. B. die Gleichung fünften Grades mit reellen Koeffizienten $f(x) = 1 + x + 5x^2 + 7x^3 + 4x^4 + 8x^5 = 0$ vorgelegt. Wir wählen $\xi = -1$ und erhalten:

$$f(x) = 1 + x + 5x^2 + 7x^3 + 4x^4 + 8x^5, \quad f(-1) = -6$$
$$f^*(x) = 1 - x + 5x^2 - 7x^3 + 4x^4 - 8x^5, \quad f^*(-1) = 26$$

$$f^*(-1) f(x) - f(-1) f^*(x) = 32 + 20x + 160x^2 + 140x^3 + 128x^4 + 160x^5$$
$$f_1(x) = 32 - 12x \ldots\ldots$$

Da hier die Vorzeichen wechseln, ist $f_1(x) = 0$ und somit auch $f(x) = 0$ *keine* **Hurwitzsche** Gleichung. Erhielte man in f_1 noch lauter gleiche Zeichen, so müßte man $f_2(x)$ aus $f_1(x)$ in derselben Weise bilden, wie f_1 aus f gewonnen wurde. Im äußersten Falle wäre so bis f_3 fortzufahren, welches ein Polynom zweiten Grades ist.

3. Das zweite Kriterium. Der Quotient

$$F(x, \xi) = \frac{f^*(\xi) f(x) - f(\xi) f^*(x)}{x - \xi},$$

den wir vorhin mit $f_1(x)$ bezeichnet haben, ist eine ganze rationale Funktion der beiden Variabeln x und ξ. Seine Entwicklung nach Potenzen von ξ laute

$$F(x, \xi) = F_0(x) + F_1(x)\,\xi + \ldots + F_{n-1}(x)\,\xi^{n-1}.$$

---

[1]) Dieser Satz steht in engem Zusammenhang mit einer von mir in der Math. Zeitschrift, Bd. 1, 1918, S. 387, gemachten Bemerkung über algebraische Gleichungen, deren Wurzeln sämtlich im Innern des Einheitskreises liegen. Eine weitgehende und wichtige Verallgemeinerung dieser Bemerkung enthält die demnächst in der Math. Zeitschrift erscheinende Arbeit des Herrn A. Cohn: »Ueber die Anzahl der Wurzeln einer algebraischen Gleichung in einem Kreise«.

Multipliziert man mit $x-\xi$ und vergleicht die Koeffizienten von 1 und ξ, so erhält man speziell

$$\bar{a}_0 f(x)-a_0 f^*(x)=x F_0, \quad -\bar{a}_1 f(x)-a_1 f^*(x)=-F_0+x F_1 \quad . \; . \; . \quad (8).$$

Hieraus folgt
$$x^2(F_0+\xi F_1)=f(x)\,\varphi(x)-f^*(x)\,\psi(x) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (9),$$
wobei

$$\varphi(x)=a_0 x-\bar{a}_1 \xi x+\bar{a}_0 \xi, \quad \psi(x)=a_0 x+a_1 \xi x+a_0 \xi \quad . \; . \; . \; . \quad (10)$$

zu setzen ist.

Ich behaupte nun, daß man unser erstes Kriterium durch das folgende ersetzen kann:

Es sei ξ eine beliebige, fest gewählte Größe mit negativem Realteil. Dann und nur dann ist $f(x)=0$ eine Hurwitzsche Gleichung, wenn a_0 und a_1 den Bedingungen

$$a_0 \neq 0, \quad \Re\left(\frac{a_1}{a_0}\right)>0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (11)$$

genügen und die Gleichung des Grades $n-1$

$$H(x)=F_0(x)+\xi F_1(x)=0$$

eine Hurwitzsche Gleichung darstellt.

Für eine Gleichung $f(x)=0$, deren Wurzeln lauter negative Realteile besitzen, sind die Bedingungen (11) gewiß erfüllt. Denn $\frac{a_1}{a_0}$ ist nichts anderes als die negativ genommene Summe der reziproken Werte der n Wurzeln der Gleichung. Um zu zeigen, daß zugleich mit $f(x)=0$ auch $H(x)=0$ eine Hurwitzsche Gleichung ist, schließen wir folgendermaßen: Für $\Re(\xi)<0$ und $\Re(x) \geqq 0$ ist, wie wir schon wissen, jedenfalls $F(x,\xi)$ von Null verschieden. Setzt man $\xi=\frac{1}{\eta}$, so stimmt wieder das Vorzeichen des Realteiles von η mit dem von ξ überein. Daher ist für $\Re(\eta)<0$, $\Re(x) \geqq 0$ auch

$$\Phi(x,\eta)=F_0 \eta^{n-1}+F_1 \eta^{n-2}+\ldots+F_{n-1} \neq 0.$$

Es sei nun x irgend eine feste Größe, für die $\Re(x) \geqq 0$ ist. Ist $F_0(x) \neq 0$, so erscheint $\Phi(x,\eta)=0$ als eine Gleichung des Grades $n-1$ für η, deren Wurzeln nach dem eben Gesagten sämtlich in der Halbebene $\Re(\eta) \geqq 0$ liegen müssen. Dasselbe gilt daher auch für die Summe $-\frac{F_1}{F_0}$ ihrer $n-1$ Wurzeln. Für $\Re(\xi)<0$ kann daher nicht $H(x)=0$ sein, da dies

$$\Re\left(-\frac{F_1}{F_0}\right)=\Re\left(\frac{1}{\xi}\right)<0$$

liefern würde. Ist ferner $F_0(x)=0$, so kann gewiß nicht zugleich auch $H(x)=0$ sein. Denn sonst wäre auch $F_1(x)=0$, also wegen (8)

$$\bar{a}_0 f(x)-a_0 f^*(x)=0, \quad \bar{a}_1 f(x)+a_1 f^*(x)=0.$$

Dies würde aber wegen $f(x) \neq 0$

$$\bar{a}_0 a_1+a_0 \bar{a}_1=0,$$

d. h. $\Re\left(\frac{a_1}{a_0}\right)=0$ liefern. Da demnach für $\Re(x) \geqq 0$ niemals $H(x)=0$ wird, so liegen die Wurzeln dieser Gleichung sämtlich in der Halbebene $\Re(x)<0$.

Es sei nun umgekehrt bekannt, daß die Gleichung $H(x)=0$ eine Hurwitzsche Gleichung ist. Wir haben dann zu zeigen, daß, wenn a_0 und a_1 den Bedingungen (11) genügen, auch $f(x)=0$ eine Hurwitzsche Gleichung ist. Dies ergibt sich folgendermaßen. Aus (9) folgt

$$x^2 H(x)=f(x)\,\varphi(x)-f^*(x)\,\psi(x),$$
$$x^2 H^*(x)=f^*(x)\,\varphi^*(x)-f(x)\,\psi^*(x).$$

Folglich wird
$$[\psi^* \varphi-\psi^* \psi] f=x^2[H \varphi^*+H^* \psi].$$

Hierbei ist insbesondere

$$\varphi^*(x)=-a_0 x+a_1 \bar{\xi} x+a_0 \bar{\xi}.$$

Wäre nun x eine Wurzel von $f(x)=0$, deren Realteil positiv oder Null ist, so müßte, da x wegen $a_0 \neq 0$ als von Null verschieden anzusehen ist,

$$H(x)\,\varphi^*(x)+H^*(x)\,\varphi(x)=0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (12)$$

sein. Auf Grund der Ungleichungen (4) ist hierin

$$|H(x)|>|H^*(x)| \quad \text{oder} \quad |H(x)|=|H^*(x)|>0.$$

Die Gleichung (12) erweist sich daher gewiß als unmöglich, wenn wir zeigen, daß

$$|\varphi^*(x)| > |\psi(x)|$$

ist. Diese Ungleichung erhält nach Division durch $|a_0 x \xi|$ die Gestalt

$$\left|-\frac{1}{\xi} + \frac{a_1}{a_0} + \frac{1}{x}\right| > \left|\frac{1}{\xi} + \frac{a_1}{a_0} + \frac{1}{x}\right|.$$

Für

$$t = -\frac{a_1}{a_0} - \frac{1}{x}, \quad \eta = \frac{1}{\xi}$$

steht hier also $|t + \eta| > |t - \eta|$. Dies ist aber wegen $\Re(t) < 0$, $\Re(\eta) < 0$ nur ein Spezialfall der Ungleichungen (4).

Es sei noch ausdrücklich erwähnt, daß in unserem Fall der Grad von $H(x)$ nicht kleiner als $n - 1$ ausfallen kann. Denn träte dies ein, so würde aus (9) und (10)

$$a_n(\overline{a_0} - \overline{a_1}\,\xi) - (-1)^n \overline{a_n}(a_0 + a_1 \xi) = 0$$

folgen. Speziell wäre also

$$|\overline{a_0} - \overline{a_1}\,\xi| = |a_0 + a_1 \xi|, \text{ d. h. } \left|\frac{1}{\xi} - \frac{\overline{a_1}}{a_0}\right| = \left|\frac{1}{\xi} + \frac{a_1}{a_0}\right|.$$

Für $\Re\left(\frac{1}{\xi}\right) < 0$, $\Re\left(\frac{a_1}{a_0}\right) > 0$ widerspricht dies aber wieder den Ungleichungen (4).

4. Das Hurwitzsche Kriterium. Sind insbesondere die Koeffizienten a_ν der Gleichung $f(x) = 0$ reelle Zahlen und setzt man

$$g(x) = a_0 + a_2 x^2 + a_4 x^4 + \ldots, \quad h(x) = a_1 x + a_3 x^3 + \ldots,$$

so wird

$$f(x) = g(x) + h(x), \quad f^*(x) = g(x) - h(x).$$

Die Formel (9) läßt sich nun auf die einfachere Form

$$\tfrac{1}{2} x^2 H(x) = (a_0 x + a_0 \xi)\, h(x) - a_1 \xi\, x\, g(x)$$

bringen und hieraus folgt leicht

$$K(x) = \tfrac{1}{2} H(x) = a_0 a_1 - \xi(a_1 a_2 - a_0 a_3) x + a_0 a_3 x^2 - \xi(a_1 a_4 - a_0 a_5) x^3 + \ldots$$

Für $a_0 > 0$ ist also $f(x) = 0$ dann und nur dann eine Hurwitzsche Gleichung, wenn $a_1 > 0$ ist und die Gleichung $K(x) = 0$ des Grades $n - 1$ für irgend ein ξ mit negativem Realteil eine Hurwitzsche Gleichung darstellt. Will man im Gebiet der reellen Zahlen bleiben, so braucht man nur ξ als negative reelle Zahl, etwa $\xi = -1$ zu wählen.

Um nun zu dem Hurwitzschen Determinantenkriterium zu gelangen, nehme man den Satz für die Gleichung $K(x) = 0$ des Grades $n - 1$ im Falle $\xi = -1$ als bereits bewiesen an. Damit $f(x) = 0$ eine Hurwitzsche Gleichung darstelle, erweist sich dann für $a_0 > 0$ als notwendig und hinreichend, daß $a_1 > 0$ sei und die zu $K(x) = 0$ gehörenden $n - 1$ Determinanten

$$\Delta_1 = a_1 a_2 - a_0 a_3, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 a_2 - a_0 a_3, & a_0 a_1 \\ a_1 a_4 - a_0 a_5, & a_0 a_3 \end{vmatrix}, \ldots$$

positiv ausfallen. Schreibt man nun $a_0 a_1 \Delta_\nu$ in der Form

$$a_0 a_1 \Delta_\nu = \begin{vmatrix} a_0 a_1, & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ a_0 a_3, & a_1 a_2 - a_0 a_3, & a_0 a_1, & 0 & \ldots \\ a_0 a_5, & a_1 a_4 - a_0 a_5, & a_0 a_3, & a_1 a_2 - a_0 a_3, & \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}$$

und addiert die erste Kolonne zur zweiten, die dritte zur vierten usw., so entstehen für $\nu = 1, 2, 3 \ldots$ die Formeln

$$a_0 a_1 \Delta_1 = a_0 a_1 D_2, \quad a_0 a_1 \Delta_2 = a_0 a_1 a_0 D_3, \quad a_0 a_1 \Delta_3 = a_0 a_1 a_0 a_1 D_4 \ldots,$$

wobei $D_2, D_3 \ldots$ die zur Gleichung $f(x) = 0$ gehörenden Hurwitzschen Determinanten sind. Die Bedingungen

$$a_1 > 0, \quad \Delta_1 > 0, \quad \Delta_2 > 0, \ldots, \quad \Delta_{n-1} > 0$$

sind also identisch mit den Bedingungen

$$D_1 = a_1 > 0, \quad D_2 > 0, \quad D_3 > 0, \ldots, \quad D_n > 0.$$

ZUSAMMENFASSENDE BERICHTE

Druckfehlerberichtigungen siehe Seite 496!

Bisherige Lösungen des Torsionsproblems.

Von **TH. PÖSCHL** in Prag.

Die für die technischen Anwendungen in Betracht kommenden Lösungen des Torsionsproblems für gerade Stäbe beruhen auf Ansätzen Saint-Venants. Dabei wird isotropes homogenes Material[1]) und Gültigkeit des linearen Zusammenhanges zwischen Spannungen und Verzerrungen vorausgesetzt. Die bisherigen Lösungen betreffen im wesentlichen die folgenden Querschnittsformen:

a) Kreis und Kreisring (trivial, Querschnitte bleiben eben),
b) Ellipse (Saint-Venant),
c) gleichseitiges Dreieck (Saint-Venant),
d) regelmäßige Sternfiguren bestimmter Form, geriffelte Säulen (Saint-Venant),
e) Rechteck (Saint-Venant, Näherungslösungen von Föppl, Goetzke),
f) Kreissektor (Saint-Venant, Greenhill, Dinnik) und Kreisringsektor (Saint-Venant, Love),
g) Zwei- und Vierecke, begrenzt von konfokalen Ellipsen und Hyperbelstücken (Filon),
h) Polygone, Winkel (Kötter, Trefftz),
i) I- und U-Eisen (Kötter, Föppl, Prandtl),
k) Hohlquerschnitte, Röhren (Macdonald, Föppl, Prescott), aufgeschlitzte Röhren (Prescott).

Die Methoden, nach denen die Lösungen erhalten werden können, sind dieselben, die überhaupt in der theoretischen Elastizitätslehre in Verwendung stehen und die aus der Potentialtheorie übernommen wurden: Die Reihenmethode und die Singularitätenmethode. Die erste ist in vielen Fällen durchgeführt worden (Reckteck, Kreissektor), die zweite dagegen noch nicht in dem Umfange, wie es ihrer Bedeutung entspricht. Neuestens wird auch das Hilfsmittel der konformen Abbildung unmittelbar verwertet. Lösungen in endlichen geschlossenen Ausdrücken gibt es nur für einige wenige Fälle. Für eine Reihe von Querschnitten (z. B. für das Rechteck), für die geschlossene Lösungen nicht bekannt sind, sind Näherungslösungen entwickelt worden, die für die praktischen Bedürfnisse hinlänglich genau sind. Auf die Singularitätsmethode hat Runge auch eine graphische und numerische Methode aufgebaut, die sich für das Torsionsproblem als sehr verwendbar erweist und die von einigen seiner Schüler (Rottsieper, Willers u. a.) weiter ausgebildet wurde.

Für die Lösungen kann die Verteilung der Spannungen in den Endquerschnitten, also der eingeprägten Belastung, nicht vorgegeben werden, sondern nur deren Gesamtmoment (semiinverse Lösungsmethode). Nach dem Saint-Venantschen Prinzipe über statisch gleichwertige Belastungen sind jedoch die Spannungen in einiger Entfernung von den Endquerschnitten von der Verteilung über diese unabhängig. Für die praktische Brauchbarkeit einer Lösung ist aber wichtig, daß sich diese Drillungsmomente angeben lassen, d. h. daß die Integration der Momente der Schubspannungen ausführbar ist. Die wichtige Frage nach dem Ort und der Größe der auftretenden größten Schubspannung läßt sich in jedem einzelnen vorgegebenen Falle beantworten. Bei den bisher durchgerechneten besonderen Beispielen, soweit sie konvexe und zwei oder mehrfach symmetrische Querschnitte betreffen, treten die Größtwerte der Schubspannungen in jenen Randpunkten auf, die dem Mittelpunkte am nächsten liegen (z. B. Rechteck, gleichseitiges Dreieck, Ellipse), und es ist zu vermuten, daß dies für alle derartigen Bereiche gilt. Allgemeine Sätze über diese praktisch bedeutungsvolle Frage, insbesondere für nichtkonvexe Bereiche sind noch nicht mit befriedigender Schärfe ausgesprochen worden.

---

[1]) Die hierher gehörigen Arbeiten von Voigt und anderen für äolotropes Material sind vorwiegend für die Kristallphysik von Interesse und sind für technische Baustoffe nur wenig verwendet worden. (S. auch Saint-Venant 1, und Love, Elastizität S. 376). Sie werden hier nicht berücksichtigt.

An ausspringenden Ecken ist die Schubspannung null, an einspringenden unendlich; doch ist zu bedenken, daß lange vor Auftreten dieser unendlich großen Spannung die Gültigkeit der Ansätze aufhört, weshalb diese Aussage, wie stets in ähnlichen Fällen, nur beschränkte Bedeutung hat.

1. Grundgleichungen. Die z-Achse des Cartesischen Koordinatensystems $0xyz$ sei parallel zu den Erzeugenden des Zylinders, so daß $0x$ und $0y$ in der Querschnittebene liegen; im übrigen ist die Lage des Achsenkreuzes willkürlich und wird in jedem Falle so angenommen, daß die davon abhängigen Rechnungen möglichst einfach werden. Die Verschiebungen nach den Achsenrichtungen seien u, v, w und die Verdrehung um die z-Achse für die Längeneinheit des Stabes sei ω. Dann erfüllt der Ansatz

$$u = -\omega yz, \quad v = \omega xz, \quad w = \omega\varphi(x,y) \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

die elastischen Gleichungen, sobald φ der Laplaceschen Differentialgleichung

$$\Delta\varphi \equiv \varphi_{xx} + \varphi_{yy} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

genügt[1]. $\varphi(xy)$ bedeutet nach (1) die Verwölbung der Querschnitte, die für alle Querschnitte gleich ausfällt.

Die zugehörige Randbedingung wird durch die Forderung geliefert, daß der Mantel spannungsfrei sein soll. Es muß also, wenn dx, dy die Projektionen des Bogenelements ds der Randkurve C des Stabquerschnittes F[2] sind (F wird zunächst als einfach zusammenhängend vorausgesetzt) und τ_{xz}, τ_{yz} die Schubspannungen der x- bezw. y-Richtung auf ein Flächenelement des Querschnittes bezeichnen, längs des Randes gelten:

$$\frac{\tau_{yz}}{\tau_{xz}} = \frac{dy}{dx}, \text{ oder } \tau_{xz}\frac{dy}{ds} - \tau_{yz}\frac{dx}{ds} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3).$$

Ist ferner G die Schubziffer, so liefern die mit Hilfe von (1) berechneten Verzerrungsgrößen die Komponenten der Schubspannung

$$\tau_{xz} = G\omega(-y + \varphi_x), \quad \tau_{yz} = G\omega(x + \varphi_y), \quad \tau_{zy} \equiv 0 \quad \ldots\ldots \quad (4).$$

Für das zugehörige Integrationsproblem ergeben sich die folgenden zwei Fassungen, von denen die erste in unmittelbarer Beziehung zur ebenen Potentialtheorie steht.

Diese erste Fassung erhält man, wenn man an Stelle von φ die konjugierte Funktion ψ einführt und $\Phi = \varphi + i\psi$, das komplexe Torsionspotential, als Funktion des komplexen Arguments $Z = x + iy$ betrachtet. Damit drückt sich die Randbedingung (3) unter Weglassung einer (für einfach zusammenhängende Bereiche unwesentlichen) additiven Konstanten in der Form aus

$$\psi = \frac{x^2 + y^2}{2} \text{ längs } C \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5).$$

Die Aufgabe ist mithin auf die erste Randwertaufgabe der Potentialtheorie zurückgeführt: Es ist eine Funktion ψ so zu bestimmen, daß im Innern von F: $\Delta\psi = 0$ ist und am Rande C die Bedingung (5) gilt. Die Schubspannungen sind gegeben durch

$$\tau_{xz} = G\omega(-y + \psi_y), \quad \tau_{yz} = G\omega(x - \psi_x) \quad \ldots\ldots \quad (6)$$

und die Größe des Torsionsmomentes M erhält man durch Summation der Momente dieser Schubspannungen um z über F in der Form:

$$M = G\omega\iint[x^2 + y^2 - x\psi_x - y\psi_y]\,dx\,dy = K\omega \quad \ldots\ldots \quad (7),$$

wobei $K = \frac{M}{\omega}$ als die »Drillungssteifigkeit« bezeichnet wird. Sie ist in den linearen Abmessungen des Querschnittes vom vierten Grade. Die Schubspannungslinien (zu denen auch C gehört) sind durch die Kurvenschar

$$\psi - \frac{x^2 + y^2}{2} = \text{konst.} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

gegeben. — Die zweite Fassung, die sich für die Anwendungen oft geeigneter erweist, ergibt sich, wenn man statt ψ die »Spannungsfunktion«

$$\Psi = \psi - \frac{x^2 + y^2}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

[1] Die Unterscheidung der Fälle, in denen die Zeiger partielle Ableitungen oder Komponenten bezeichnen (wie insbesondere bei τ), wird im Texte nicht besonders hervorgehoben, ist aber aus dem Zusammenhang klar.

[2] Darunter verstehen wir sowohl den Querschnitt als Bereich, wie auch die Größe der Querschnittsfläche.

einführt, zu deren Bestimmung die Bedingungen dienen:

$$\Delta \Psi = -2 \text{ in } F \quad . \quad . \quad . \quad (10),$$

$$\Psi = 0 \quad \text{auf } C \quad . \quad . \quad . \quad (11).$$

Die Schubspannungen ergeben sich aus Ψ einfach in der Form:

$$\tau_{xz} = G\omega \Psi_y, \quad \tau_{yz} = -G\omega \Psi_x \quad . \quad . \quad . \quad (12).$$

Für das Torsionsmoment erhält man durch Anwendung der Produktintegration und Benutzung von (11)

$$M = -G\omega \iint (x\Psi_x + y\Psi_y)\, dx\, dy = 2G\omega \iint \Psi\, dx\, dy = K\omega \quad . \quad . \quad (13)$$

und für die Schar der Schubspannungslinien

$$\Psi = \text{konst.} \quad . \quad . \quad . \quad (14).$$

Die Erweiterung dieser Ansätze für mehrfach zusammenhängende Bereiche wird in **10** gegeben.

2. Zwei Gleichnisse. Aus der Tatsache, daß die in **1** gegebenen Gleichungen des Torsionsproblems (10) und (11) mit den Bedingungsgleichungen anderer Probleme übereinstimmen, fließen zwei bemerkenswerte Analogien, die sehr zur Veranschaulichung beitragen.

a) Das hydrodynamische Gleichnis von Lord Kelvin[1]). Die Geschwindigkeitskomponenten v_x, v_y nach x, y der ebenen Strömung einer Flüssigkeit in einem gegebenen Bereiche mit der konstanten Wirbelstärke -2 sind durch die Gleichung verbunden:

$$\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} = -2 \quad . \quad . \quad . \quad (15),$$

wozu noch die Bedingung stetiger Raumerfüllung kommt (Kontinuitätsgleichung):

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (16).$$

Die letzte Gleichung wird durch Einführung einer Stokesschen Stromfunktion Ψ identisch befriedigt:

$$v_x = \Psi_y, \quad v_y = -\Psi_x \quad . \quad . \quad . \quad (17),$$

wonach (15) die Form (10) annimmt.

Da an der Wand die Geschwindigkeit tangential zu dieser gerichtet sein muß, so ist, wenn n die innere Normale und s den Bogen der Randkurve bedeutet,

$$v_n = \Psi_s = 0, \quad \Psi = \text{konst.}$$

und zwar nehmen wir diese Konstante $= 0$, so daß diese Randkurve (hier eine Stromlinie!) wie früher durch $\Psi = 0$ gegeben ist. Damit ist die völlige formale Uebereinstimmung mit dem Torsionsproblem hergestellt. Die Stromlinien $\Psi =$ konst. in dem einen Fall entsprechen den Schubspannungslinien in dem andern usw. Trägt man $\Psi(x, y)$ in jedem Punkte auf, so erhält man einen »Stromfunktionshügel«, dessen Eigenschaften mit denen des sogleich zu besprechenden Spannungshügels übereinstimmen.

b) Das Seifenhautgleichnis von Prandtl. Man denke sich aus einem dünnen ebenen Blech eine Oeffnung herausgeschnitten, die die Form des Querschnitts des zu tordierenden prismatischen Stabes hat und setze dieses Blech als Boden in ein Gefäß ein. Wenn man dann die Oeffnung mit einer Seifenhaut überzieht und in dem Gefäß einen mäßigen Ueberdruck herstellt, so nimmt diese die Form des »Spannungshügels« an, der eine vollständige Darstellung aller in Betracht kommenden Größen gestattet. Differentialgleichung und Randbedingung für die Ausbiegung der Seifenhaut sind (bei nicht zu großen Werten der Ausbiegung) mit (10) und (11) identisch.

Diese Deutung eignet sich am besten zur anschaulichen und teilweise auch messenden Beurteilung des Verhaltens eines Querschnittes. Der Spannungshügel hat nämlich folgende Eigenschaften:

1. Seine Schichtlinien sind die Schubspannungslinien.
2. Sein Gefälle (also die Dichte der Schichtlinien) gibt die Größe der Schubspannung an jeder Stelle.
3. Der Rauminhalt des Hügels über der Randebene gibt ein Maß für die Drillungssteifigkeit des Stabes.

---

[1]) Thomson und Tait, Handbuch der theoret. Physik, deutsch von Helmholtz und Wertheim, Brauschweig 1874, 1. Bl 2. Teil, S. 228.

Ferner läßt sich auch der Satz aussprechen:

4. Für jeden konvexen Bereich gibt es eine Stelle, in der die Schubspannung $\tau = 0$ herrscht, ihr entspricht der Gipfel des Spannungshügels. Er fällt i. a. bei mehr als einfach symmetrischen Querschnitten mit dem geometrischen Mittelpunkte zusammen. Die durch ihn zu den Erzeugenden parallel gelegte Gerade wäre eigentlich als »Achse der Torsion« zu bezeichnen. Der steilsten Neigung entspricht am Rande die größte Schubspannung, die den gefährlichsten Punkt des Querschnittes darstellt.

Für nicht konvexe Gebiete können fallweise mehrere Gipfel auftreten und demnach auch entsprechend viele gefährliche Stellen, doch sind allgemeine Sätze hierüber nicht bekannt (vergl. einige Bemerkungen hierzu in Abschnitt **7**).

3. Elementare Lösungen. Im folgenden sind die bekannten elementaren Lösungen in ihrem Zusammenhange mit dem zugehörigen komplexen Torsionspotential $\Phi = \varphi + i\psi$ dargestellt. Die in Ψ auftretende additive Konstante ist jedesmal so angeschrieben, daß $\Psi = 0$ dem Rande entspricht, wie in Gl. (11) und (13) vorausgesetzt.

a) Kreis und Kreisring. Für den Kreis vom Halbmesser a ist $\Phi =$ konst. und

$$\Psi = \frac{a^2}{2} - \frac{x^2 + y^2}{2} \qquad (18)$$

zu setzen, d. h. der Querschnitt bleibt eben und die Schubspannungslinien sind konzentrische Kreise. Für das Torsionsmoment M folgt, wenn J_p das polare Trägheitsmoment des Querschnittes für den Mittelpunkt bedeutet:

$$M = G\omega J_p, \quad J_p = \frac{a^2 F}{2} = \frac{a^4 \pi}{2} \qquad (19).$$

Der daraus folgende Wert der Drillungssteifigkeit $K = GJ_p$ wurde früher irrtümlich für alle Querschnitte als gültig angenommen, ist jedoch nur für den Kreis und Kreisring richtig. Die größte Schubspannung tritt am Rande auf und ist vom Betrage

$$\tau_{\max} = G\omega a = \frac{M}{J_p} a = \frac{2M}{\pi a^3} \qquad (20).$$

Da längs der gleichachsigen Zylinderflächen keine Schubspannungen übertragen werden, fließt aus (19) durch Subtraktion sogleich auch die Lösung für den Kreisring, dessen Halbmesser a und b $(a > b)$ sind. Da mit dem Innenzylinder auch das auf dessen Endflächen entfallende Moment in Wegfall kommt, so folgt für den Kreisring:

$$M = G\omega (a^4 - b^4) \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{16} \frac{a^4 - b^4}{a} \tau_{\max} \qquad (21),$$

da die größte Schubspannung ebenfalls am äußeren Rande auftritt.

Durch die gleiche Ueberlegung ist es immer möglich, wenn die Lösung für einen Vollquerschnitt bekannt ist, zu einem bestimmten Hohlquerschnitt überzugehen. Voraussetzung ist hierbei, daß die innere Begrenzung von einer Schubspannungslinie gebildet wird, die der durch den Vollquerschnitt bestimmten Schar angehört. Im folgenden sind in diesem Falle die Lösungen für die betreffenden Hohlquerschnitte (Ellipsenring für ähnliche Ellipsen usw.) nicht besonders behandelt. Wie man vorzugehen hat, wenn die genannte Bedingung nicht erfüllt ist, wird im Abschnitt **10** auseinandergesetzt.

b) Ellipse mit den Halbachsen a, b, $(a > b)$. Aus dem Ansatz

$$\Phi = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \frac{i}{2} Z^2 \qquad (22)$$

folgt nach (9), wenn wieder $\Psi = 0$ die Randellipse darstellen soll:

$$\Psi = {}^1/_2 \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} (x^2 - y^2) - \frac{x^2 + y^2}{2} + \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} = \frac{1}{a^2 + b^2} \{a^2 b^2 - b^2 x^2 - a^2 y^2\} \qquad (23)$$

und wenn J_x, J_y die Trägheitsmomente der Ellipsenfläche bezgl. der Hauptachsen sind, so folgt für das Torsionsmoment nach (13)

$$M = \frac{2G\omega}{a^2 + b^2} (a^2 J_x + b^2 J_y) = \frac{G\omega\pi a^3 b^3}{a^2 + b^2} \qquad (24).$$

Die Schubspannungen sind nach (12) gegeben durch

$$\tau_{xz} = -G\omega \frac{2a^2 y}{a^2 + b^2} = -\frac{2My}{\pi a b^3}, \quad \tau_{yz} = \frac{2Mx}{\pi a^3 b} \qquad (25)$$

und τ_{max} tritt an den Enden der kleinen Achse, also an der der Drehachse zunächst gelegenen Stelle $y = b$ auf und beträgt

$$\tau_{max} = \frac{2M}{\pi a b^2} \quad \ldots \ldots \quad (26).$$

Die Schubspannungslinien sind die zur Randellipse ähnlichen Ellipsen.

c) Gleichseitiges Dreieck mit der Seitenlänge a. Sei h die Höhe, so ist zu setzen:

$$\Phi = -\frac{t}{2h} Z^3 \quad \ldots \ldots \quad (27),$$

dann folgt

$$\Psi = \frac{1}{2h}(y^3 - 3x^2y) - \frac{x^2+y^2}{2} + \frac{2h^2}{27} = \frac{1}{2h}\left(y + \frac{h}{3}\right)\left(y - \sqrt{3}\,x - \frac{2h}{3}\right)\left(y + \sqrt{3}\,x - \frac{2h}{3}\right) \quad (28).$$

Der Umriß $\Psi = 0$ besteht sonach aus den drei Geraden, deren Gleichungen durch das Verschwinden der 3 Klammergrößen dargestellt sind, die ein gleichseitiges Dreieck bilden.

Für das Torsionsmoment ergibt sich nach (13):

$$M = \frac{G\omega a h^3}{30} \quad \ldots \ldots \quad (29).$$

Die größte Schubspannung tritt in den Seitenmitten auf und hat die Größe:

$$\tau_{max} = (\tau_{xz})_{x=0,\ y=-\frac{h}{3}} = \frac{G\omega h}{2} = \frac{15M}{ah^2} = \frac{20M}{a^3} \quad \ldots \ldots \quad (30).$$

d) Unendlich langer Streifen (Näherungslösung für das schmale Rechteck).

Sucht man eine Lösung der Gleichungen (10) und (11), die von y allein abhängt, so erhält man (ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann das lineare Glied wegbleiben):

$$\Psi = b^2 - y^2 \quad \ldots \ldots \quad (31).$$

$\Psi = 0$ gibt also die beiden Geraden $y = \pm b$. Wird aus diesem Streifen ein langes Stück (Länge $2a$) herausgeschnitten und wird auf die Enden keine Rücksicht genommen, so liefert (13):

$$M = \frac{16}{3} G\omega a b^3 \quad \ldots \ldots \quad (32),$$

ferner gibt (12):

$$\tau_{xz} = -G\omega 2y, \qquad \tau_{yz} = 0,$$

also ergibt sich für die größte Schubspannung, die längs der Ränder $y = \pm b$ auftritt, der Betrag

$$\tau_{max} = 2G\omega b = \frac{3M}{8ab^2} \quad \ldots \ldots \quad (33).$$

Wegen der Nichtberücksichtigung der Enden ist dieser Ausdruck für das Rechteck nur als eine Näherungslösung zu betrachten. Es sei noch bemerkt, daß sich dieser Fall für den Ansatz

$$\Phi = \frac{i}{2} Z^2, \text{ d. h. in b) } b = 0$$

ergibt.

e) Geriffelte Säulen. Die bisher behandelten sind Sonderfälle des allgemeinen Ansatzes:

$$\Phi = -iaZ^m, \quad a > 0 \quad \ldots \ldots \quad (34).$$

Führen wir hierin Polarkoordinaten $Z = re^{i\vartheta}$ ein, so wird die Querschnittform gegeben durch

$$\Psi = -ar^m \cos m\vartheta - \frac{r^2}{2} + c = 0, \quad (c = \text{konst.}) \quad \ldots \ldots \quad (35)$$

und die Verwölbung durch

$$\varphi = ar^m \sin m\vartheta.$$

Die Kurven $\Psi =$ konst. sind algebraische Kurven $m$ter Ordnung. Jede von ihnen, die einen geschlossenen Bereich begrenzt, kann als Querschnitt genommen werden. Legt man für $m = 4$ die Kurve durch jene Punkte, in denen die Spannungen verschwinden, so zerfällt sie in 2 Hyperbeln, die ein »Quadrat« mit spitzen Winkeln und konkaven Seiten bilden. Durch Kombination derartiger Lösungen erhielt Saint Venant auch sternförmige Kurven mit abgerundeten Ecken, kannelierte Säulen und ähnliches. Die praktische Bedeutung dieser Fälle ist gering.

4. Reihenmethode[1]). Mit den im vorigen Abschnitte angegebenen sind die Lösungen in endlichen Ausdrücken, die praktische Bedeutung haben, im wesentlichen erschöpft. Die Behandlung anderer, vorgegebener Querschnitte verlangt die Anwendung direkter Methoden, von denen hier die aus der Potentialtheorie bekannten in Betracht kommen: die Reihenmethode und die Singularitätenmethode. Außerdem gelangen die Methoden der konformen Abbildung in ausgedehntem Maße zur Verwendung.

Bei der Reihenmethode wird ψ (bezw. φ oder auch $\Phi = \varphi + i\psi$) aufgebaut aus partikulären Lösungen der Laplaceschen Gleichung $\Delta\psi = 0$ — Potentialen, wie wir kurz sagen wollen — und als unendliche Reihe von solchen Potentialen mit unbestimmten Beiwerten angesetzt. Die Gleichung $\Delta\psi = 0$ wird hierzu passend auf solche Koordinaten umgeformt, die sich dem gegebenen Querschnitte anschmiegen; können — was sich stets als vorteilhaft erweist — isometrische (d. h. die Ebene in Kurvenvierecke mit gleich langen Seiten teilende) Koordinaten ξ, η verwendet werden, so bleibt ihre Form dabei invariant. Durch Fortsetzung der Reihe bis zum Rand und Vergleich mit der ebenfalls in ξ, η geschriebenen Randbedingung (5) werden die unbestimmt gelassenen Beiwerte der Reihe festgelegt.

Diese Methode ist z. B. anwendbar, wenn der gegebene Querschnitt von der Art eines krummlinig begrenzten Viereckes ist. Hierbei werden die partikulären Lösungen so gewählt, daß jede für sich die Randbedingung auf einem Paar gegenüberliegender Seiten erfüllt; die dabei noch freibleibenden Beiwerte werden dann durch Vergleich mit der Randbedingung auf dem anderen Seitenpaar ermittelt. Auf diese Weise sind insbesondere die Lösungen für das Rechteck, den Kreissektor, den Kreisringsektor sowie für Querschnitte erhalten worden, die sich aus konfokalen Ellipsen und Hyperbeln zusammensetzen.

Hat man so eine Lösung $\Psi = \Psi(\xi, \eta)$ gefunden, so sind die Schubspannungskomponenten, wenn durch Einführung dieser Koordinaten

$$\Delta\Psi = \Psi_{xx} + \Psi_{yy} = \lambda(\xi,\eta)[\Psi_{\xi\xi} + \Psi_{\eta\eta}]$$

wird, durch die Ausdrücke gegeben:

$$\tau_{\xi z} = G\omega\lambda\Psi_{\eta}, \quad \tau_{\eta z} = -G\omega\lambda\Psi_{\xi} \quad \ldots \ldots \quad (36).$$

5. Rechteck. Die von Saint-Venant (**1**)[2]) gegebene (exakte) Lösung für das Rechteck mit den zu den Achsen parallelen Seiten $x = \pm a, y = \pm b$, $(a > b)$ geht von der Gl. (2) und der Randbedingung (3) aus und liefert für φ die gut konvergierende Reihe

$$\varphi = -xy + \frac{32\,b^2}{\pi^3}\left[\sin\frac{\pi y}{2b}\,\frac{\mathfrak{Sin}\frac{\pi x}{2b}}{\mathfrak{Cos}\frac{\pi a}{2b}} - \frac{1}{3^3}\sin\frac{3\pi y}{2b}\,\frac{\mathfrak{Sin}\frac{3\pi x}{2b}}{\mathfrak{Cos}\frac{3\pi a}{2b}} + \ldots\right] \quad (37)$$

und für das zugehörige ψ:

$$\psi = {}^1/_2\,(x^2 - y^2) - \frac{32\,b^2}{\pi^2}\left[\cos\frac{\pi y}{2b}\,\frac{\mathfrak{Cos}\frac{\pi x}{2b}}{\mathfrak{Cos}\frac{\pi a}{2b}} - \frac{1}{3^3}\cos\frac{3\pi y}{2b}\,\frac{\mathfrak{Cos}\frac{3\pi x}{2b}}{\mathfrak{Cos}\frac{3\pi a}{2b}} + \ldots\right] \quad (38).$$

Die Teile der Schubspannungen werden demgemäß

$$\frac{\tau_{xz}}{G\omega b} = -\frac{2y}{b} + \frac{16}{\pi^2}\left[\sin\frac{\pi y}{2b}\,\frac{\mathfrak{Cos}\frac{\pi x}{2b}}{\mathfrak{Cos}\frac{\pi a}{2b}} - \frac{1}{3^2}\sin\frac{3\pi y}{2b}\,\frac{\mathfrak{Cos}\frac{3\pi x}{2b}}{\mathfrak{Cos}\frac{3\pi a}{2b}} + \ldots\right] \quad (39)$$

$$\frac{\tau_{yz}}{G\omega b} = \frac{16}{\pi^2}\left[\cos\frac{\pi y}{2b}\,\frac{\mathfrak{Sin}\frac{\pi x}{2b}}{\mathfrak{Cos}\frac{\pi a}{2b}} - \frac{1}{3^2}\cos\frac{3\pi y}{2b}\,\frac{\mathfrak{Sin}\frac{3\pi x}{2b}}{\mathfrak{Cos}\frac{3\pi a}{2b}} + \ldots\right] \quad \ldots \quad (40).$$

Der größte Wert der Schubspannung $(\tau_{xz})_{\max} = \tau_{\max}$ tritt für $a > b$ in den Punkten $x = 0$, $y = \pm b$ auf; ihr Betrag ist in folgender Weise von b und dem Verhältnis a/b abhängig:

$$\frac{\tau_{\max}}{G\omega b} = \frac{16}{\pi^2}\left\{\frac{1}{\mathfrak{Cos}\frac{\pi a}{2b}} + \frac{1}{3^2\,\mathfrak{Cos}\frac{3\pi a}{2b}} + \ldots\right\} - 2 = \varepsilon_1\left(\frac{a}{b}\right) \quad \ldots \quad (41).$$

[1]) S. dazu noch Abschnitt **7** und **10 b**. — [2]) Die in Klammern gesetzten fetten Zahlen nach Eigennamen beziehen sich auf das Literaturverzeichnis am Schlusse.

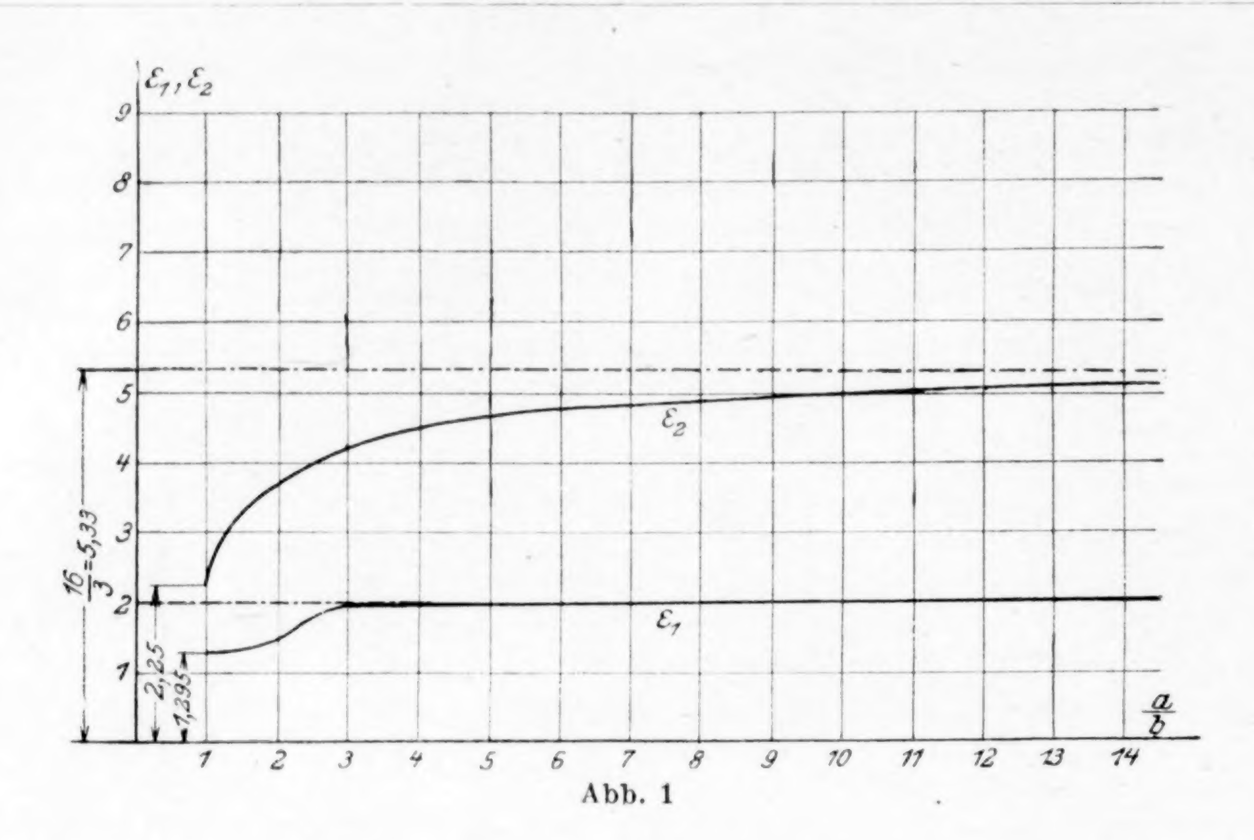


Abb. 1

In Abb. 1 sind die Werte von $\varepsilon_1 = \varepsilon_1\left(\frac{a}{b}\right)$ in ihrer Abhängigkeit von $\frac{a}{b}$ aufgetragen. Für $a = \infty$ ergibt sich der in (Abschn. **3** d) angegebene Wert.

Für das Torsionsmoment erhielt Saint-Venant durch Summation der Momente der Schubspannungen

$$\frac{M}{G\omega a b^3} = \frac{16}{3} - \frac{1024}{\pi^5}\frac{b}{a}\left\{\mathfrak{Tg}\frac{\pi a}{2b} + \frac{1}{3^3}\mathfrak{Tg}\frac{3\pi a}{2b} + \ldots\right\} = \varepsilon_2\left(\frac{a}{b}\right) \quad . \; . \; . \quad (42)$$

Auch die Werte von $\varepsilon_2 = \varepsilon_2\left(\frac{a}{b}\right)$ sind in Abb. 1 eingetragen. Durch Division von (42) und (41) folgt weiter

$$\tau_{\max} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\frac{M}{a b^2} \quad \text{oder} \quad M = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} a b^2 \tau_{\max} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (43).$$

Die Beibehaltung von 1 Glied der Reihe in (41) und zwei Gliedern von (42) liefert bereits ε_1 und ε_2 bis auf 0,2 vH genau (Goetzke).

Zur Angabe genauerer Zahlenwerte sind die Werte von ε_1 und ε_2 in der folgenden Zahlentafel zusammengestellt.

$\frac{a}{b}$	1	2	3	4	5	6	7	8	10	12	100	∞
ε_1	1,295	1,484	1,994	2	2	2	2	2	2	2	2	2
ε_2	2,253	3,664	4 203	4,498	4,665	4,777	4,842	4,916	5,000	5,059	5,299	5,333
$\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$	1,739	2,469	2,102	2,249	2,333	2,388	2,421	2,458	2,500	2,529	2,650	2,665

Bezüglich der Näherungsformeln für das Rechteck s. Abschn. **11** a.[1])

[1]) Beispiel: Für eine Stahlschiene von rechteckigem Querschnitt sei das Verhältnis $\frac{a}{b} = 5$ vorgeschrieben. Wie groß sind ihre Abmessungen zu wählen, und wie groß ist die Verdrehung, wenn sie mit dem Moment 100 kgm auf Torsion beansprucht wird und die zulässige Schubspannung von 1000 kg/cm^2 nicht überschritten werden soll? Aus Abb. 1 oder der Zahlentafel folgt für $\frac{a}{b} = 5$:

$$\varepsilon_1 = 2, \; \varepsilon_2 = 4{,}665,$$

daher ist aus (41)

$$a b^2 = 5 b^3 = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\frac{M}{\tau} = \frac{2}{4{,}7}\,\frac{10000}{1000} = 4{,}26 \text{ cm}^3,$$

$$b = 0{,}95 \text{ cm}, \; a = 4{,}75 \text{ cm und } G\omega = 526{,}3.$$

6. Kreissektor und Kreisringsektor. a) Für den Kreissektor, dessen Ränder durch $r = 0$, $r = a$, $\vartheta = \pm \beta$ gegeben sind, erhielt Saint-Venant (**2**) nach der Reihenmethode den folgenden Ausdruck für das Torsionsmoment:

$$\frac{M}{G\,\omega\,a^4} = \frac{A}{2}\left[1 - \frac{\operatorname{tg} 2\beta}{2\beta} + \frac{32}{\pi\beta}\sum_0^\infty \frac{1}{2n+1}\,\frac{1}{\left(\frac{2n+1}{2\beta}\pi\right)^2 - 4}\,\frac{1}{\frac{2n+1}{2\beta}\pi + 2}\right] = \varepsilon \qquad (44).$$

Die Werte dieses Verhältnisses für verschiedene β sind in der folgenden Zahlentafel zusammengestellt:

2β	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	2π
ε	0,0181	0,0349	0,0825	0,148	0,296	0,528	0,686	0,823 [1]

Die Komponenten der Schubspannung an den Rändern in Polarkoordinaten sind durch die Ausdrücke gegeben:

$$\left.\begin{aligned} &\text{für } \vartheta = \pm\beta, \quad \frac{\tau_{rz}}{G\omega a} = \mp \frac{r}{a}\operatorname{tg} 2\beta \pm \frac{4}{\beta}\sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{\left(\frac{2n+1}{2\beta}\pi\right)^2 - 4}\left(\frac{r}{a}\right)^{\frac{2n+1}{2\beta}\pi - 1} \sin\frac{2n+1}{2}\pi \\ &\text{für } r = a, \quad \frac{\tau_{\vartheta z}}{G\omega a} = 1 - \frac{\cos 2\vartheta}{\cos 2\beta} + \frac{4}{\beta}\sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{\left(\frac{2n+1}{2\beta}\pi\right)^2 - 4}\cos\frac{2n+1}{2\beta}\pi\,\vartheta \end{aligned}\right\} \quad (45).$$

Der größte Wert von $\tau_{\vartheta z}$ ist durch $\frac{d\tau_{\vartheta z}}{d\vartheta} = 0$ bestimmt und liegt naturgemäß bei $\vartheta = 0$, der von τ_{rz} kann dagegen nur angenähert ermittelt werden. Es ergibt sich für

2β	$\frac{r}{a}$ für $(\tau_{rz})_{\max}$	$\frac{(\tau_{rz})_{\max}}{G\omega a}$	$\frac{(\tau_{\vartheta z})_{\max}}{G\omega a}$
$\frac{\pi}{3}$	0,562	0,490	0,452
$\frac{2\pi}{3}$	0,367	0,652	0,622
π	0	0,849	0,719

Man sieht daraus, daß die größten Werte der Schubspannung (für $2\beta \leqq \pi$) immer an den geradlinigen Stücken der Begrenzung auftreten.

Andere Formen der Lösungen für den Kreissektor, die aber nicht allgemein bis zur Berechnung des Momentes und der der größten auftretenden Spannung durchgeführt sind, rühren von Greenhill (**3**) und Dinnik her[2].

b) Kreisringsektor. Saint-Venant (**2**) hat auch für den Kreisringsektor die Ausdrücke für die Schubspannungen und das Drillingsmoment angegeben. Wenn der Zentriwinkel des Sektors 2β ist und der Außenradius r_1 gleich dem doppelten Innenradius r_0 ist, also $r_1 = 2r_0$, wenn ferner $G\omega\,\frac{r_1^4 - r_0^4}{2\beta} = \mu$ gesetzt wird, so ergibt sich für

2β	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	π
$\frac{M}{\mu}$	0,080	0,107	0,116

Love[3]) gibt die Lösung für diesen Fall in Form einer Fourierschen Doppelreihe unter Verwendung isometrischer Koordinaten.

---

[1]) A. u. L. Föppl, Drang u. Zwang II. S. 148 finden für $\beta = 2\pi$ den Wert $\varepsilon = 0,878$.

[2]) Der von Greenhill für das komplexe Torsionspotential gegebene Ausdruck in Form von bestimmten komplexen Integralen läßt sich auch direkt aus dem in Abschnitt **8** gegebenen Randintegral gewinnen und deutet auf Zusammenhänge zwischen den reellen Randintegralen mit komplexen hin, die an anderem Orte näher untersucht werden sollen.

[3]) A. E. H. Love, Lehrbuch der Elastizität, deutsch von Timpe, Leipzig u. Berlin, 1907, S. 371.

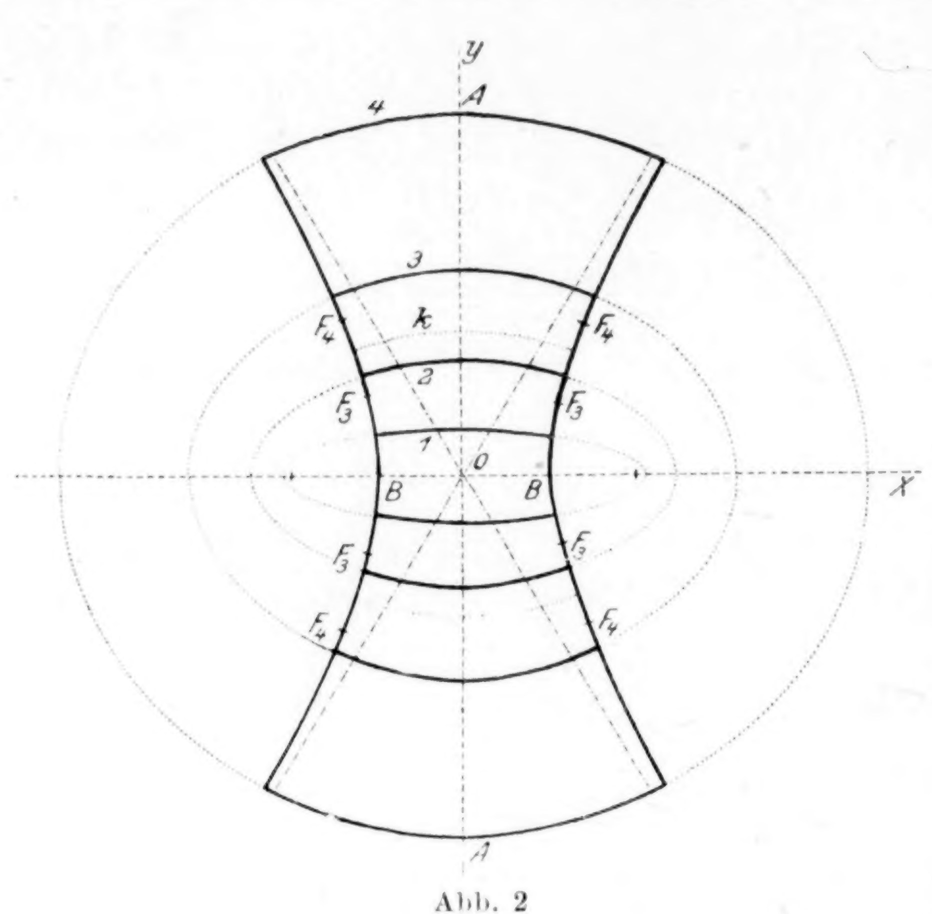


Abb. 2

7. Krummlinige Zwei- und Vierecke, begrenzt von Stücken von konfokalen Ellipsen und Hyperbeln. Von den Querschnitten, für die Filon das Torsionsproblem gelöst hat, sind praktisch nur die erwähnenswert, die in Abb. 2 dargestellt sind; sie sind durch Bogen einer Ellipse und einer mit dieser konfokalen Hyperbel begrenzt und können etwa herangezogen werden, wenn es sich um die Beurteilung des Verhaltens einer Stuhlschiene handelt.

Werden die durch $x + iy = \mathfrak{Cof}\,(\xi + i\eta)$ definierten elliptischen Koordinaten $\xi\eta$ benutzt, so entsprechen die Kurven $\xi = \text{konst.}$ $(0 < \xi < \infty)$ den Ellipsen, $\eta = \text{konst.}$ $\left(0 < |\eta| < \frac{\pi}{2}\right)$ den Hyperbeln, $\xi = \xi_1$ und $\eta = 0$ entspricht einer Ellipse, die längs der großen Achse vom Rande bis zu den Brennpunkten reichende Kerben besitzt. Das Problem wird durch Filon nach der Reihenmethode behandelt, wie sie in Abschnitt **4** auseinandergesetzt wurde.

Für das Torsionsmoment ergeben sich folgende Zahlenwerte:

$\frac{M}{G\omega c^4}$	$\eta = \frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\xi = \frac{\pi}{6}$	0,171	0,312	0,405	0,468
$\xi = \frac{\pi}{3}$	8,876	2,032	3,220	4,812
$\xi = \frac{\pi}{2}$	3,88	9,416	16,44	29,91
$\xi = \frac{2\pi}{3}$	22,90	58,82	96,41	194,2

Bemerkenswert sind die Ergebnisse bezüglich des Ortes der auftretenden größten Schubspannung. Zu jeder Hyperbel gehört eine bestimmte (kritische) Grenzellipse, die die Eigenschaft hat, daß bis zu ihr die gefährlichen Punkte in den Scheiteln B der Hyperbel liegen. Von dieser Grenzellipse an gibt es je 4 Punkte (in der Abbildung mit F mit Zeigern bezeichnet, die den äußeren Ellipsen entsprechen), in denen die größten Werte der Schubspannungen auftreten. Dies deutet darauf hin, daß bis zur Grenzellipse der Prandtlsche Spannungshügel nur einen Gipfel in 0, für die größeren jedoch deren zwei auf der y-Achse besitzt, während in 0 ein Sattel der Spannungsfläche auftritt.

Wird außer der Ellipse nur ein Ast der Hyperbel als Begrenzung zugelassen, so ergeben sich Kurvenzweiecke, in denen als Grenzfälle die Halbellipse und die mit einer Kerbe auf einer Seite der großen Achse versehene Vollellipse enthalten sind.

8. Singularitätenmethode. Einführung der Greenschen Funktion. Die ersten Lösungen des Torsionsproblems (Abschn. **3**) wurden so gefunden, daß erst gewisse Lösungen der Gleichungen (10) und (11) angesetzt und dazu erst hinterher die zugehörigen Querschnittsformen bestimmt werden, für die sie gelten. Die Reihenmethode war schon ein Hilfsmittel, für einen vorgegebenen Querschnitt das Torsionsproblem zu lösen. Eine andere Methode, diese direkte Fragestellung anzugreifen, ist, wie schon Thomson (Lord Kelvin) und Tait bemerkt haben, die Heranziehung der Theorie des logarithmischen Potentials und der konformen Abbildung. Das bedeutungsvolle Ergebnis

hiervon ist der Satz, daß die Lösung des Torsionsproblems für alle Bereiche explizite angegeben werden kann, für welche die konforme Abbildung auf den Kreis bekannt ist. Damit ist eine große Gruppe von Querschnittsformen (theoretisch alle) der direkten Behandlung zugänglich gemacht.

Zum Beweise dieses Satzes, der hier nur angedeutet werden kann, benötigen wir den Begriff der Greenschen Funktion für den gegebenen Bereich. In der Greenschen Formel

$$\int\limits_{(C)} \left(U \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial U}{\partial n}\right) ds = \iint\limits_{(F)} (V \Delta U - U \Delta V)\, dx\, dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (46)$$

bezeichne wie in Abschnitt **1** ds das Bogenelement der Randkurve C, aus dem das dn durch Drehung um $\frac{\pi}{2}$ im positiven Sinn hervorgeht; wird also C so durchlaufen, daß F zur Linken bleibt, so ist dn das Element der inneren Normalen.

Unter der Greenschen Funktion (schlechtweg oder 1. Art) eines gegebenen Bereiches F versteht man eine Funktion $\Gamma = \Gamma(x, y, \xi, \eta)$ zweier Punkte (x, y) (ξ, η), von denen (x, y) der laufende und (ξ, η) der Aufpunkt heißen soll, so daß

a) Γ abgesehen von A eindeutig ist und $\Delta\Gamma = 0$,

b) Γ in 0 logarithmisch unendlich wird, also $G = \log \frac{1}{r} + \omega$, $\Delta\omega = 0$, ω stetig,

c) Γ am Rande C von F verschwindet.

Setzen wir, um an die erste Fassung des Integrationsproblems anzuschließen, $U = \psi$, also $\Delta U = \Delta\psi = 0$ im Innern, $\psi = \frac{r^2}{2}$ längs C, $V = \Gamma$, legen dann einen kleinen Kreis K vom Halbmesser ϱ und wenden auf das Gebiet zwischen K und C die Gleichung (46) an, so liefert der Grenzübergang $\varrho \to 0$

$$\varphi(\xi, \eta) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{(C)} \frac{r}{2} \frac{\partial \Gamma}{\partial n} ds \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (47).$$

Durch Auftragen von $\psi(\xi, \eta) - \frac{\xi^2 + \eta^2}{2}$ als Funktion von ξ, η ergibt sich der Spannungshügel.

Bezüglich der Ermittlung der Greenschen Funktion Γ für einen gegebenen Bereich F gilt folgendes: Sei F durch die Kurve C in der Z Ebene, $Z = x + iy$, begrenzt und sei $w(Z)$ eine der Funktionen, die F konform auf die Fläche des Einheitskreises abbilden, dann hat die Funktion

$$W(Z) = \frac{w(Z) - w(\zeta)}{1 - \overline{w}(\zeta)\, w(Z)}$$

dieselbe Eigenschaft, und es geht dabei der Punkt $\zeta = \xi + i\eta$ in den Nullpunkt über. Die Greensche Funktion mit ζ als Aufpunkt ist nun

$$\Gamma = \log |W(Z)| = \Re \log W(Z) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (48).$$

Ist also die konforme Abbildung von F auf den Einheitskreis bekannt, so liefern (47) und (48) die Lösung der zugehörigen Torsionsaufgabe.

Die Verwölbung der Querschnitte ist durch die zu ψ konjugierte Funktion φ gegeben und auf ähnliche Weise darstellbar.

Diese Methode eignet sich z. B. sehr gut für den Kreissektorquerschnitt, und führt da unmittelbar auf die von Greenhill (**4**) nach der Reihenmethode viel umständlicher gefundenen Ergebnisse.

9. Polygone mit geraden Seiten. Für polygonale Querschnitte liegen exakte Lösungen nach zwei verwandten Methoden vor, die beide das Hilfsmittel der konformen Abbildung verwenden.

Die erste, die von F. Kötter für den Fall des Winkeleisens mit gleich starken (Dicke d), aber verschieden langen Schenkeln (mittlere Längen l_1 und l_2) durchgeführt wurde, geht unmittelbar darauf aus, durch konforme Abbildung des Winkelprofils, das ein Sechseck mit fünf Winkeln $\frac{\pi}{2}$ und einem $\frac{3\pi}{2}$ darstellt, auf die Halbebene die analytische Funktion $\Phi(Z) = \varphi + i\psi$ zu bestimmen, deren Imaginärteil ψ die gegebenen Randwerte $\frac{r^2}{2}$ annimmt. Dabei wird, ähnlich wie es Saint-Venant für das Rechteck getan

hat, die Randbedingung vereinfacht; bei Saint-Venant geschieht dies durch Abspaltung des Teiles $\frac{iZ^2}{2}$ von $\Phi(Z)$ so, daß für die Restfunktion die Randwerte auf einem Seitenpaar null werden. Kötter verwendet diesen Gedanken in der Form, daß er zunächst näherungsweise die Aufgabe für das beiderseits unendlich lange Winkeleisen löst, und dann jenen Teil besonders bestimmt, der, zu dieser Lösung hinzugefügt, die Randwertaufgabe für das endliche Winkeleisen löst. Man hat dann (ähnlich wie beim Rechteck) nur eine Funktion zu bestimmen, deren Imaginärteil auf den Längsseiten null ist und auf den die Schenkel abschließenden Querseiten die Randwerte annimmt, die durch die erwähnte Näherung gegeben sind.

Das Torsionsmoment erhält Kötter für $\frac{l_1}{d} > 4$, $\frac{l_2}{d} > 4$ in der Form

$$\frac{M}{G\,\omega} = {}^1/_3\,(l_1 + l_2 - 0{,}63\,d)\,d^3 + 2\,d^4\,C \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (49),$$

wobei C eine Zahlengröße bedeutet, die sich auf das unendlich lange Winkeleisen bezieht, jedoch zahlenmäßig nicht angegeben wird.

Die zweite, neuestens von Trefftz gegebene Methode benützt den Umstand, daß die Randbedingung für geradlinige Begrenzungsstücke wesentlich dadurch vereinfacht wird, daß man nicht die Funktion $\Phi(Z) = \varphi + i\psi$ selbst, die wegen der Unbestimmtheit der Torsionsachse nur bis auf eine lineare Funktion von Z bestimmt ist, sondern ihre zweite Ableitung $\Phi''(Z)$ betrachtet; die Form dieser zweiten Ableitung ist durch ihr Verhalten in den Ecken des Polygons vollständig bestimmt und wird allgemein angegeben. Trefftz führt diesen Gedanken für ein Winkeleisen mit unendlich langen Schenkeln durch und gelangt auch zur Darstellung der Schubspannungen im ganzen Bereiche und insbesondere an den Rändern. Auf die Wiedergabe der Verfahren und der Ergebnisse im einzelnen muß hier verzichtet werden.

10. Hohlquerschnitte. Für den Fall der Hohlquerschnitte bleibt die Darstellung mittels des Spannungshügels $\Psi = \Psi(x, y)$ als anschauliches Bild für die Verteilung der Schubspannungen ohne weiteres anwendbar. Was neu hinzutritt ist nur, daß die Konstanten, die die Werte von Ψ an den Rändern geben, außen und innen nicht mehr gleich sein können, der Spannungshügel geht längs des Innenrandes in eine Hochebene (bezw. wenn es mehrere gibt, längs der Innenränder in ebensoviele Hochebenen) über, deren Höhe h über dem Außenrand jedoch nicht willkürlich, sondern durch die Aufgabe selbst bestimmt ist.

Wendet man den Greenschen Satz an auf das über den Ringquerschnitt F erstreckte Integral, das die Summe der Momente der Schubspannungen gibt, so folgt unmittelbar

$$\frac{M}{G\omega} = -\iint_{(F)} (x\,\Psi_x + y\,\Psi_y)\,dx\,dy = 2\iint_{(F)} \Psi\,dx\,dy + 2\,h\,F_0 \quad . \quad . \quad . \quad (50),$$

wenn F_0 die Größe der nicht vorhandenen Innenfläche des Querschnittes bezeichnet. Daraus sieht man, daß jetzt das Torsionsmoment durch die Summe aus dem über dem Ringquerschnitt F stehenden Teil des Spannungshügels und dem Zylinder dargestellt wird, der über der Innenfläche F_0 bis zur Hochebene reicht (z. B. in Abb. 3 durch den schraffierten Raum). Dieser Umstand macht auch die Zunahme der Drillungssteifigkeit für Hohlquerschnitte in Vergleich mit andern Querschnitten von gleicher Flächengröße anschaulich klar.

Für mehrere Höhlungen bedeutet in (50) F die vorhandene Querschnittfläche und statt $h\,F_0$ ist die Summe der entsprechenden Produkte zu nehmen.[1])

a) Die einzige Hohlform, für welche die Lösung des Torsionsproblems in endlichen Ausdrücken vorliegt, ist der von zwei konfokalen Ellipsen begrenzte Ring. In elliptischen Koordinaten ξ, η, die wieder durch $x + iy = c\,\mathfrak{Cof}\,(\xi + i\eta)$, also durch $x = c\,\mathfrak{Cof}\,\xi\,\cos\eta$, $y = c\,\mathfrak{Sin}\,\xi\,\sin\eta$ definiert werden, lautet (nach Grennhill **4**) der Ausdruck für die Spannungsfunktion

$$\Psi = \frac{c^2}{4}\left[\frac{\mathfrak{Sin}\,2(\xi_1 - \xi) + \mathfrak{Sin}\,2(\xi - \xi_0)}{\mathfrak{Sin}\,2(\xi_1 - \xi_0)}\cos 2\eta - \mathfrak{Cof}\,2\xi - \cos 2\eta + \mathfrak{Cof}\,2\xi_1\right] \quad (51),$$

worin ξ_0 und ξ_1 ($\xi_1 > \xi_0$) die beiden Randellipsen bezeichnen. Man bestätigt leicht das Bestehen der Gleichungen

---

[1]) Ueber die allgemeine Lösung für Querschnitte mit beliebig vielen Löchern vgl. eine demnächst in dieser Zeitschrift erscheinende Note des Hrn. Némenyi.

$$\begin{aligned} \Delta\Psi &= -2 \text{ in } F, \\ \Psi &= 0, \text{ für } \xi = \xi_1, \\ \Psi &= \frac{c^2}{4}\left(\mathfrak{Cof}\, 2\,\xi_1 - \mathfrak{Cof}\, 2\,\xi_0\right), \text{ für } \xi = \xi_0. \end{aligned}$$

Das Torsionsmoment ergibt sich nach (51), da $F_0 = \frac{c^2\,\pi}{2}\,\mathfrak{Sin}\, 2\,\xi_0$

$$\frac{M}{G\,\omega\,c^4} = \frac{\pi}{4}\left\{\mathfrak{Cof}\, 2\,\xi_1\left(\mathfrak{Sin}\, 2\,\xi_1 - \mathfrak{Sin}\, 2\,\xi_0\right) - \frac{\mathfrak{Cof}\, 2\,(\xi_1 - \xi_0) - 1}{\mathfrak{Sin}\, 2\,(\xi_1 - \xi_0)}\right\} \quad . \quad . \quad (52).$$

In Abb. 3 ist ein lotrechter Schnitt durch den Spannungshügel längs der großen Achse der Ellipse dargestellt. Die Schubspannungslinien $\Psi =$ konst. sind dabei keineswegs die Ellipsen $\xi =$ konst. des konfokalen Systems.

Die Lösung enthält als Grenzfall die Vollellipse mit einem ebenen Spalt, der die Erzeugenden durch die Brennpunkte des konfokalen Systems verbindet und durch $\xi_0 = 0$ gegeben wird. Für die Ellipse $\xi_1 = 1{,}4$ z. B. wird durch einen solchen Spalt das Torsionsmoment für eine bestimmte Verdrrhung ω im Vergleich zur Vollellipse auf $^1/_6$ herabgesetzt. Der größte Wert der Schubspannung tritt auch hier an den Enden der kleinen Achse der äußeren Randellipse auf.

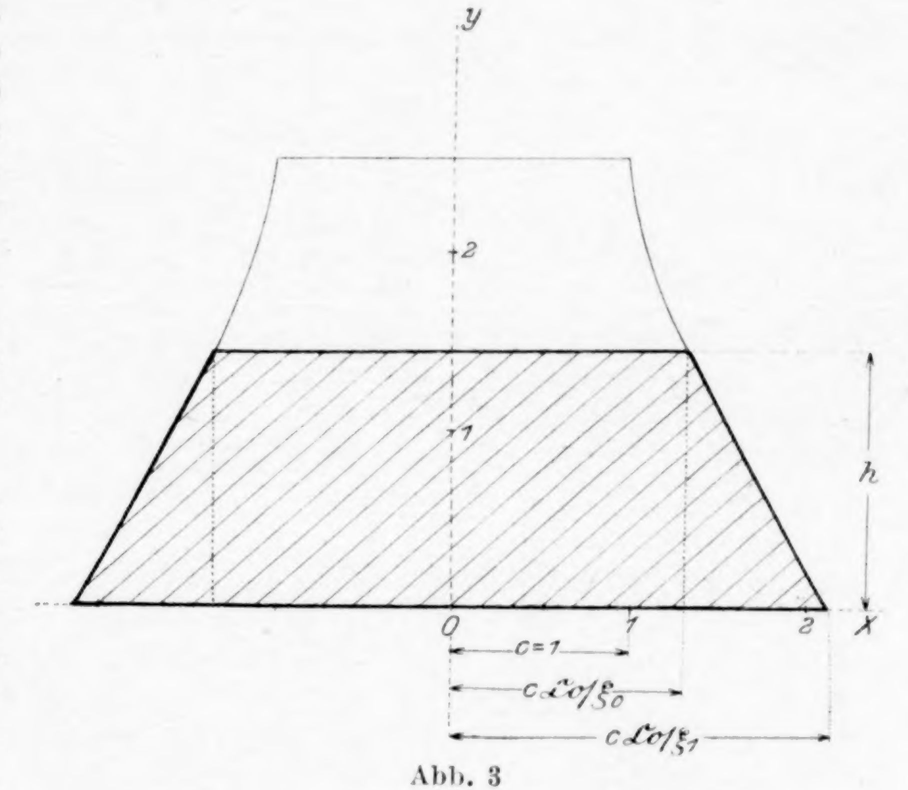


Abb. 3

b) Für den exzentrischen Kreisring wurde die exakte Lösung nach der Reihenmethode durch Macdonald gegeben; dabei werden bipolare oder bizirkulare isometrische Koordinaten verwendet, in denen die gegebenen Kreise als Parameterlinien enthalten sind.

Sind a und a' die Halbmesser der beiden Kreise, b der Abstand ihrer Mittelpunkte, so folgt für das Torsionsmoment der Ausdruck

$$\frac{M}{G\,\omega\,a^4} = \frac{\pi}{2}\left[1 - \left(\frac{a'}{a}\right)^4\right] - 2\,\pi\left(\frac{b}{a}\right)^2\left\{\left(\frac{a'}{a}\right)^2 + \frac{\left(\frac{a'}{a}\right)^4}{\left[1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2\right]^2} + \frac{\left(\frac{a'}{a}\right)^6}{\left[\left[1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2\right]^2 - \left(\frac{a'}{a}\,\frac{b'}{a}\right)^2\right]^2} + \ldots\right\} (53).$$

Wenn a' klein ist, so ist angenähert (bis zur 4,0):

$$\frac{M}{G\,\omega\,a^4} = \frac{\pi}{2} - 2\,\pi\left(\frac{b}{a}\right)^2\left(\frac{a'}{a}\right)^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (54)$$

und wenn ω_0 der Drall ist, den das gleiche M für den Vollkreis vom Halbmesser a erzeugt, also $\frac{M}{G\,\omega_0\,a^4} = \frac{\pi}{2}$, so ist

$$\frac{\omega}{\omega_0} = \frac{1}{1 - \frac{4\,b^2 a'^2}{a^4}} = 1 + \frac{4\,b^2 a'^2}{a^4} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (55).$$

Was den Ort der größten Schubspannung betrifft, so liegt dieser für $b < \frac{a - a'}{2}$ auf der äußeren Zylinderfläche an der Stelle, wo die Zylinder einander am nächsten kommen, und ihre Größe ist bei kleiner Höhlung praktisch so groß wie beim Vollzylinder. Wenn dagegen $b > \frac{a - a'}{2}$, so tritt die größte Schubspannung am inneren Rande auf, und zwar wieder dort, wo dieser dem äußeren am nächsten kommt; sie ist größer als die größte Schubspannung im Vollzylinder.

A. und L. Föppl (Drang und Zwang II, S. 118) geben eine Entwicklung in ähnlichen, jedoch nicht isometrischen Koordinaten, die aber noch nicht bis zu Ende geführt ist.

11. Näherungslösungen. Eine Anzahl von Näherungslösungen, die durch Verkürzung von bekannten strengen Lösungen erhalten wurden, sind uns schon begegnet. Darüber hinaus sind insbesondere für Fälle, in denen die exakte Lösung entweder überhaupt nicht bekannt oder doch nicht einfach genug ist, um praktisch verwertet zu werden, Näherungslösungen gesucht worden, die von der strengen Lösung verschieden und einfacher als diese sind. Wenn es angeht, wird dabei so verfahren, daß für Ψ gewisse, den Rand- und Symmetriebedingungen genügende Funktionen mit unbestimmten Beiwerten $c_1, c_2, \ldots$ gewählt werden, die dann in den Ausdruck für die Formänderungsarbeit

$$A = \frac{1}{2\,G} \iint\limits_{(F)} (\Psi_x^{\,2} + \Psi_y^{\,2})\, dx\, dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (56)$$

und auch in die hinzutretende Nebenbedingung Gl. (13) bezw. (50) eingesetzt werden. Dadurch werden A und M, sobald die Integrationen ausgeführt sind, Funktionen der Beiwerte, die sodann durch die Minimalbedingungen

$$\frac{\partial (A + \lambda M)}{\partial c_i} = 0, \quad (c_i = 1, 2, \ldots)$$

auf Grund des Prinzips der kleinsten Formänderungsarbeit bestimmt werden (Methode von Ritz). Da die Ansätze für Ψ, wie gesagt, von der strengen Lösung verschieden sind, so werden sie (i. a.) die Gleichgewichts- und Verträglichkeitsbedingungen nicht exakt befriedigen, die damit gerechneten Werte von φ und τ werden aber doch bei geschickter Wahl den strengen Werten recht nahe kommen können.

In vielen Fällen (Kasten-, I-, U-, —|—-Querschnitt u. a.) wird jedoch die Anwendung dieses Verfahrens unmöglich sein, und dann ergibt sich die Notwendigkeit, andersartige Betrachtungen anzustellen, die die Beurteilung des Sachverhaltes gestatten, was insbesondere von A. Föppl mit großem Erfolge geschehen ist.

a) Die Genauigkeit der Näherungslösungen für das Rechteck, deren es eine große Zahl gibt, kann leicht durch Vergleich mit der strengen Lösung festgestellt werden. In der Zahlentafel ist eine Zusammenstellung der Werte für das Torsionsmoment und die größte Schubspannung für einige der bekanntesten Näherungslösungen gegeben. Da übrigens leicht benutzbare Tafelwerke für die in der strengen Lösung enthaltenen hyperbolischen Funktionen vorliegen, so wird es sich bei Anspruch auf größere Genauigkeit unbedingt empfehlen, auf diese strenge Lösung zurückzugreifen, für die sich auch die Rechnung kaum verwickelter gestaltet, als für die brauchbaren Näherungen.

b) Die Näherungsformel, die Saint-Venant auf Grund seiner Ergebnisse aufgestellt hat, in der Absicht, eine allgemein gültige Formel zu geben, lautet:

$$M = K\omega = \frac{1}{40}\,\frac{F}{J_p}\,G\,\omega, \quad \text{also } K = G\,\frac{F^4}{40\,J_p} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (57),$$

worin J_p das polare Trägheitsmoment der Querschnittsfläche für den geometrischen Mittelpunkt bedeutet. Tatsächlich gilt diese Formel für alle von Saint-Venant behandelten Vollquerschnitte mit Ausnahme des gleichseitigen Dreieckes mit ziemlicher Annäherung. Dagegen versagt sie völlig für die Hohlquerschnitte (Kastenträger) und auch für die anderen in der Technik gebräuchlichen Trägerquerschnitte.

c) Trägerquerschnitte. Einen Fortschritt brachte die Arbeit von Bredt, die jedoch erst durch die daran anschließenden Schriften von Föppl (**1**) die verdiente Würdigung erfuhr. Föppl ging selbst noch über die Ansätze von Bredt hinaus und stellte eine einfache Formel auf, die mit großer Annäherung für alle Trägerquerschnitte gilt, die aus schmalen und langen Rechtecken (Trapezen mit schwachen Seitenneigungen) zusammengesetzt angesehen werden können, wie dies insbesondere für die Querschnitte der gewalzten, dünnflanschigen Flußeisenträger zutrifft. Föppl geht aus von der Formel für die Drillungssteifigkeit $K = \frac{M}{\omega}$ bezw. für den »Drillungswiderstand« $J = \frac{K}{G} = \frac{M}{G\omega}$ für das schmale Rechteck, die in Abschnitt (**3** d) angegeben wurde. Setzt man in Gl. (32): $2a = l =$ Länge, $2b = d =$ Breite des Rechtecks, so ist

$$J = \tfrac{1}{3}\, l\, d^3, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (58),$$

welcher Ausdruck für den Drillungswiderstand jedes einzelnen Rechteckes, aus denen der Querschnitt gebildet wird, zu nehmen ist. Man erhält also für ein aus solchen Streifen zusammengesetztes Profil

$$J = \tfrac{1}{3}\, \Sigma l d^3, \quad \text{also } M = G\,\omega J = \tfrac{1}{3}\, G\,\omega \Sigma l d^3 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (59);$$

	Spannungsfunktion $\Psi =$	Torsionsmoment $\frac{M}{G\omega a b^3} = \varepsilon_2 =$	Zahlenwert von ε_2 für $\frac{a}{b} =$ 1	2	3	5	10	∞	Größte Schubspannung für $a > b$ $\tau_{\max} \frac{a b^2}{M} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} =$	Zahlenwert von $\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$ für $\frac{a}{b} =$ 1	2	3	5	10	∞
1	$\frac{M}{ab}\frac{\pi^2}{32}\cos\frac{\pi x}{2a}\cos\frac{\pi y}{2b}$	$\frac{1}{0{,}235}\frac{1}{1+\frac{b^2}{a^2}}$	2,127	3,404	3,829	4,092	4,213	4,255	$\frac{\pi^3}{64} = 0{,}484$	0,484					
2	$\frac{M}{ab}\left\{0{,}284\cos\frac{\pi x}{2a}\cos\frac{\pi y}{2b} + 0{,}02425\sin\frac{2\pi x}{2a}\sin\frac{2\pi y}{2b}\right\}$	$\frac{1}{0{,}229}\frac{1}{1+\frac{b^2}{a^2}}$	2,183	3,493	3,930	4,200	4,323	4,367	0,446	0,446					
3	$\frac{M}{ab}\frac{9}{32}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)$	$\frac{1}{0{,}225}\frac{1}{1+\frac{b^2}{a^2}}$	2,222	3,555	3,999	4,273	4,400	4,444	0,562	0,562					
4	$\frac{M}{ab}\frac{45}{256}\left[\frac{2+130\frac{b^2}{a^2}+2\frac{b^4}{a^4}}{\left(1+2\frac{b^2}{a^2}\right)\left(2+\frac{b^2}{a^2}\right)} + \frac{3\frac{x^2}{a^2}}{1+2\frac{b^2}{a^2}} + \frac{3\frac{y^2}{a^2}}{2+\frac{b^2}{a^2}}\right]\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)$	—	2,247	3,602	4,098	4,453	4,782	4,975	$\frac{45}{128}\frac{2+157\frac{b^2}{a^2}+12\frac{b^4}{a^4}}{\left(1+2\frac{b^2}{a^2}\right)\left(2+\frac{b^2}{a^2}\right)}$	0,626	0,573	0,513	0,437	0,378	0,352
5	Strenge Lösung von Saint-Venant	$\frac{M}{G\omega a b^3} = \varepsilon_2$	2,253	3,664	4,203	5,665	5,000	4,333 $\left(=\frac{16}{3}\right)$	$\tau_{\max}\frac{a b^2}{M} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$	0,575	0,405	0,474	0,429	0,400	0,375

dieser Ausdruck wird sich noch durch einen Korrektionsfaktor verbessern lassen, sobald eingehende Versuche darüber angestellt sein werden.

Die Formel, deren Richtigkeit durch Heranziehung des Seifenhautgleichnisses mit Rücksicht auf die Unerheblichkeit der Drehachse unmittelbar einleuchtet, zeigt, daß z. B. durch die Gl. (57) die Drillungssteifigkeit für den Stab mit Kreuzquerschnitt (+) um das Vierfache, für einen breitflanschigen I-Träger um das Doppelte überschätzt würde.

Die zweite wichtige Frage, die zu lösen ist, ist die nach der Größe und dem Orte der größten Schubspannung. Wenn man von dem Einfluß der Ecken absieht, wo die sonst eintretende Spannungserhöhung durch entsprechende Ausrundung herabgesetzt werden kann (die übrigens auch bei ungenügender Ausrundung wegen der eintretenden bleibenden Formänderung ohne Schaden ist), so läßt sich zeigen, daß die größte Schubspannung, von der die Bruchgefahr abhängt, in der Mitte der Längsseite jenes Rechteckes auftreten muß, dessen Dicke am größten ist; es ist demgemäß

$$\tau_{\max} = \frac{M d_{\max}}{J} = \frac{3\, M d_{\max}}{\Sigma\, l d^3} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (60).$$

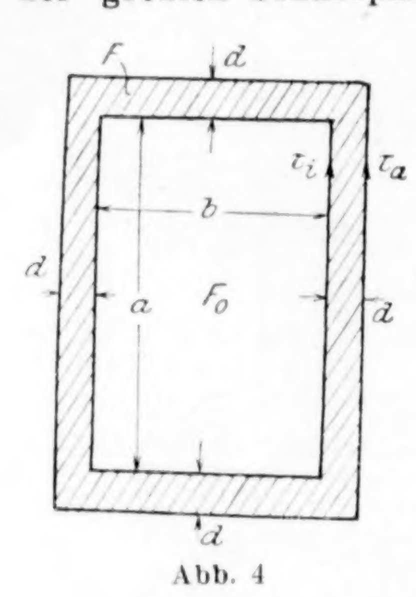


Abb. 4

Für die Beurteilung der Spannung in einer Ausrundung verwenden übrigens A. und L. Föppl (Drang und Zwang II, S. 94 f) mit großem Nutzen den Stokeschen Satz.

d) Für Kastenquerschnitte mit kleinen Wandstärken mit Bezug auf die Hauptabmessungen genügt es in erster Annäherung, eine geradlinige Spannungsverteilung durch die Wand anzunehmen und den Mittelwert $\tau_m = \frac{\tau_a + \tau_i}{2}$ dieser Spannungen zu benutzen. Da nach dem Stokesschen Satze und mit den Bezeichnungen der Abb. 4

$$\text{für den Innenrand:} \quad \int_i \tau\, ds = \tau_i\, 2\,(a + b) = 2\, G\, \omega F_0),$$

$$\text{für den Außenrand:} \quad \int_a \tau\, ds = \tau_a\, 2\,(a + b + 4\, d) = G\, \omega\, (F + F_0)$$

ist, wobei τ_i und τ_a die konstant angenommenen Werte der Schubspannungen am Innen- und Außenrande sind, so folgt:

$$\frac{\tau_a}{\tau_i} = \frac{(a + 2\, d)\,(b + 2\, d)\,(a + b)}{a b\,(a + b + 4\, d)} = 1 + 2\, d\, \frac{a^2 + b^2}{a b\,(a + b)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (61).$$

Rechnet man ferner das Torsionsmoment (für den Mittelpunkt des Rechteckes), so ergibt sich

$$\tau_m = \frac{\tau_a + \tau_i}{2} = \frac{M}{2\, d\,(a + d)\,(b + d)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (62).$$

In ähnlicher Weise ist auch bei verschiedenen Wandstärken zu verfahren (Drang und Zwang, II, S. 130 f).

12. Versuche. Von den älteren Drehungsversuchen, die die Uebereinstimmung mit der Theorie von Saint-Venant prüfen sollten, sind insbesondere die von Duleau, Savart und Westheim zu nennen [1]). Die Versuchsstoffe waren Glas, Messing, Kupfer und Eisen, die Querschnitte meist entweder rechteckig (mit Breiten bis über das 200 fache der Dicken) oder elliptisch. Die Versuche haben schon gezeigt, daß die Theorie die Verhältnisse in genügender Entfernung von den Stabenden richtig wiedergibt. Dies wurde auch durch neuere Versuche von J. Bauschinger, C. v. Bach, C. Bretschneider u. a. erwiesen, die sich bereits auf eine viel größere Mannigfaltigkeit von Querschnitten erstreckten und zeigten, daß die Abweichungen s. a. unter 1,5 vH liegen [2]).

So fand Bauschinger für 5 Probestäbe aus Gußeisen mit folgenden Querschnitten: Kreis, Ellipse $a : b = 1 : 2$, Quadrat, Rechteck $a : b = 1 : 2$, Rechteck $a : b = 1 : 4$, wobei

[1]) Navier-Saint-Venant, Resistance des corps solides, 3 ième ed. (1864) Appendice IV, § 40, S. 622 f. u. die dort gegebene Literatur, insbesondere Westheim, Annales des chimie et des physique 50 (1857), S. 195.

[2]) Bez. neuerer Versuche s. auch Winkelmann, Handbuch der Physik, Leipzig (1908), I, 1, S. 646

für die vier ersten $F = 50$ cm², für den letzten $F = 25$ cm² betrug, für gleiche Torsionsmomente den Drall in folgenden Verhältnissen stehend:

$$1 : 1{,}25 : 1{,}13 : 1{,}40 : 9{,}1,$$

während schon die Saint-Venantsche Näherungsformel (57), die für die genannten Querschnittsformen anwendbar ist, liefert:

$$1 : 1{,}24 : 1{,}20 : 1{,}47 : 9{,}65,$$

also trotz des Umstandes, daß für Gußeisen die Voraussetzungen der Theorie nur sehr unvollkommen zutreffen, eine befriedigende Uebereinstimmung.

Für kreisförmige (100 mm Dmr.) und quadratische Wellen (100 mm Seitenlänge) aus Flußstahl verschiedener Stärke fand Bauschinger bei gleichen Drehmomenten das Verhältnis der Drehwinkel im Mittel zu 1 : 0,696, während die Rechnung nach Gl. (57) 1 : 0,698 gibt. Für Querschnitte dieser Art (s. Abschnitt **11** a) und elastisches Material ist also schon die Näherungsformel vollkommen ausreichend.

Bach untersuchte auch eine große Zahl anderer Querschnitte, und zwar teilweise auch solche, die theoretisch nur angenähert behandelt werden können, wie Hohlstäbe mit Dreieck- und Rechteckquerschnitt, Stäbe mit Trapez-, I-, U- und —|—-Querschnitt u. a. m. Als Material wurde auch hier (aus Gründen der leichteren Herstellbarkeit) Gußeisen gewählt, das bis zum Bruche nur geringe bleibende Formänderungen aufweist. Das Ziel dieser Versuche war jedoch nicht so sehr die Prüfung der Saint-Venantschen Theorie, sondern ein festigkeitstechnisches, betraf nämlich insbesondere die Bestimmung des Bruchmomentes, den Einfluß der Gußhaut u. dergl. Die Ergebnisse der von A. Föppl (**1.**) geplanten Versuche, die darauf abzielten, verläßliche Angaben über die Drillungssteifigkeit aller normalisierten Profileisen zu schaffen (und dabei auch u. a. die Gültigkeit seiner Näherungsformel für die aus Rechtecken zusammensetzbaren Querschnitte [Abschnitt **11** d] zu prüfen) sind noch nicht veröffentlicht. Für U-Eisen u. a. erhielt C. Busemann beachtenswerte Ergebnisse, jedoch keine neuen Ansätze.

Zum Schluß sei noch auf eine Wahrnehmung hingewiesen, die bei den Versuchen von Rejtö über bleibende Formänderungen zutage getreten ist[1]. Rejtö hat bemerkt, daß im Gebiete der bleibenden Formänderungen bei prismatischen Stäben mit rechteckigem Querschnitt die größte Schubspannung nicht in den Mitten der langen, sondern in den Mitten der kurzen Seiten auftritt, was darauf hindeutet, daß im plastischen Gebiete, für das naturgemäß die Ansätze der linearen Elastizitätstheorie keine Geltung mehr haben, Verhältnisse herrschen, die den alten Navierschen Anschauungen näherliegende Folgerungen ergeben. Doch scheint dieser Sachverhalt noch nicht völlig geklärt zu sein.

Literatur.

C. v. Bach: Versuche über Drehungsfestigkeit, Z. d. V. d. Ing. 33 (1889) S. 137 u. 162 oder Abhandlungen und Berichte aus Anlaß der Feier des 20jähr. Bestehens des Württembergischen Bezirksvereines d. Ing. Stuttgart (1897) S. 80.

C. Batho: 1. The Calculation of torsion stresses in framed structures and thinwalled prisms, Brit. Ass. Report 1915, Engineering 1915.

2. Torsion of solid and hollow prisms and cylinders. Engineering 1916.

J. Bauschinger: Experimentelle Prüfung der neueren Formeln für die Torsion prismatischer Körper, Civilingenieur 27 (1881).

R. Bredt, Kritische Bemerkungen zur Drehungselastizität, Z. d. V. d. Ing. (1896) S. 785.

C. Bretschneider: Versuche über die Verdrehung von Stäben mit rechteckigem Querschnitt zur Ermittlung der Längs- und Querdrehung auf Zug beanspruchter Stäbe, Diss. Stuttgart, Berlin (1911).

C. Busemann, Formänderung durch Verdrehung, Z. d. V. d. Ing. 55 (1911), S. 633.

A. N. Dinnik: Die Analogie von Prandtl. Der Einfluß eines radialen Risses bei Torsion der kreis- und ringförmigen Wellen. Mitteilungen des Donsschen polytechnischen Institutes, Nowotscherkassk (1912) I. Bd. II. Teil, S. 309.

N. G. Filon: On the resistence to torsion of certain forms of shatting, with special reference to the effect of keyways, Phil. Trans. 193 A (1900) S. 309.

A. Föppl: 1. Ueber den elastischen Verdrehungswinkel eines Stabes, Sitzungsber. d. bayr. Ak., München (1917).

2. Beanspruchung eines Stabes von elliptischem Querschnitt auf Drillen bei behinderter Querschnittswölbung, ebenda, München (1920).

R. Goetzke: Zur Theorie der Torsion rechteckig prismatischer Stäbe, Z. d. V. d. Ing. 53 (1909) S. 935.

A. G. Greenhill: 1. On the motion of water in a rotating rectangular prism. Quart. J. 15 (1877) S. 144.

2. Fluid motion in a rotating quadrantal cylindre, Mess of math. (2) 8 (1878) S. 89.

[1] Grundlagen der theoretischen mechanischen Technologie und der Technologie der Metalle (ungarisch), Budapest (1914) II. Bd. S. 171.

3. Fluid motion in a rottaing rectangle formed by two concentric circular and two radii, ebenda (2) 9 (1879) S. 35.

4. Fluid motion between confocal elliptic cylinders and confocal ellipsoids Quart. J. 16 (1879) S. 227.

L. Henneberg: 1. Zur Torsionsfestigkeit, Z. f. Math. u. Phys. 51 (1904) S. 225.

2. Ueber einige Folgerungen, die sich aus dem Satz von Green für die Torsion von Stäben ergeben, ebenda 51 (1904) S. 242.

F. Kötter: Ueber die Torsion des Winkeleisens, Ber. der Preuß. Akad. d. Wiss. Berlin 1908, 2, S. 935.

Larmor: The influence of flaws and air-cavities on the strenght of materials, Phil. Mag. (5) 33 (1892) S. 70.

A. E. H. Love: ebenda S. 76.

H. M. Macdonald: On the torsional strenght of a hollow shaft, Proc. Cambr. Phil. Soc. 8 (1894) S. 62.

L. Prandtl: 1. Eine neue Darstellung der Torsionsspannungen bei prismatischen Stäben von beliebigem Querschnitt, Jahresb. d. deutsch. Math. Ver. 13 (1904) S. 31.

2. Zur Torsion von prismatischen Stäben, Phys. Z. 4 (1903) S. 758.

J. Prescott: The torsion of closed and open tubes, Phil. Mag. 60 (1920).

C. Runge: 1. Ueber eine Methode, die partielle Differentialgleichung $\Delta u =$ Constans numerisch zu integrieren, Z. f. Math. u. Phys. 56 (1908) S. 225.

2. Graphische Lösung von Randwertaufgaben der Gleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, Nachrichten d. Ges. der W. zu Göttingen, Math. phys. Kl. (1911).

B. de Saint-Venant: 1. Mémoire sur la torsion des prismes, Mémoires prés. par. div. savants, 14 (1856).

2. Torsion des prismes à base mixtilique, Paris, C. R. 87 (1878) S. 849, 893.

3. Formule donnant approximativement le moment de torsion Paris, C. R. 88 (1879) S. 142.

K. Soecknick: Ueber das Saint-Venantsche Problem, Progr. Friedrichskollegium Königsberg No 6 (1904).

J. Stieghorst, Drehwiderstandswerte von Hohlstäben, deren Querschnitte Aehnlichkeit mit Schiffskörperquerschnitten haben, Schiffbau 20 (1918), S. 1, 30, 57, 79.

E. Trefftz: Ueber Torsion prismatischer Stäbe von polygonalem Querschnitt, Math. Am. 82 (1920) S. 97. 74

KURZE AUSZÜGE

Festigkeitslehre.

Kegelförmige Behälterböden. Bekanntlich hat das Problem der rotationssymmetrischen Schalen durch Meißner eine überraschend einfache Lösung erfahren. Die Zerfällung der Differentialgleichung vierter Ordnung in zwei zweiter Ordnung ermöglichte die Erledigung einer Reihe von Fällen, welche durch Schüler von Meißner (Dubois, Bolle) in Dissertationen ausführlich bearbeitet wurden. Bei den mathematischen Anforderungen, welche diese Arbeiten an den Techniker stellen, muß man jedoch sagen, daß die Entwicklung von einfacheren und übersichtlicheren Methoden zur näherungsweisen Berechnung von Schalen auch heute noch ein nicht vollständig gelöstes Problem bildet. Herr Dr.-Ing. Kann hat in Heft 29 der „Forschungsarbeiten auf dem Gebiet des Eisenbetons" Berlin 1921, 39 S. (Darmstädter Doktordissertation) eine wesentliche Vereinfachung dieses Rechnungsganges erzielt, indem er der Berechnung der Kegelschale die Fiktion zu Grunde legt, daß die Trägheitsmomente der Schalenquerschnitte um die Kegelerzeugenden als Achsen verschwinden. Mit der gleichzeitig gemachten Annahme, daß die Querkontraktion unendlich klein wird (bei Eisen-Beton als zulässig nachgewiesen) erscheint diese Voraussetzung bei symmetrischer Lastverteilung offenbar sehr plausibel. Man kann natrülich damit nicht zum Grenzfall der ebenen Platte übergehen, wohl aber ist der Grenzfall der Zylinderschale darin enthalten. Durch Vergleich mit einer von Dubois ausführlich durchgerechneten Kegelschale von 30° Neigung (Erzeugende gegen die Horizontale) wird die Zulässigkeit der neuen Näherungsmethode numerisch bestätigt. Der geringe Unterschied der Ergebnisse ist beachtenswert. Ausführlich durchgerechnete Beispiele (ein Kegeldach und ein Siloboden) erleichtern dem Techniker den Gebrauch der Formeln. Im ganzen kann man sagen, daß die Arbeit einen wertvollen Beitrag zum Problem der Schalen darstellt.

Einfluß von Löchern und Nuten auf die Beanspruchung von Wellen. Wellen, die auf Verdrehen beansprucht sind und Bohrlöcher zum Schmieren sowie Nuten aufweisen, reißen häufig an den Rändern unter 45° gegen die Wellenachse auf. *L.* Föppl findet nun (Zeitschr. d. Ver. deutsch. Ingen. 1921, S. 497) mittels einer einfachen Überlegung eine Erklärung für dieses Verhalten.

Zunächst ist es klar, daß der Spannungszustand in der äußersten Schicht einer gedrillten Vollwelle sich qualitativ nicht unterscheidet von dem Spannungszustand einer gedrillten Hohlwelle, welche so dünnwandig ist, daß man diesen Zustand nach Abwickelung des Mantels in die Ebene als einen ebenen betrachten kann. Nimmt man jetzt den Durchmesser des Loches kreisförmig und so klein, daß man den Fall einer unendlichen Scheibe mit gleicher Zug- und Druckspannung nach den zwei Hauptrichtungen vor sich hat, so hat man eben den Fall der reinen Schubbeanspruchung, wie er im Mantel einer gedrillten Welle vorhanden ist. Die Spannungsfunktion ist leicht aufzustellen, und das Ergebnis ist, daß die Tangentialspannung am Lochrand unter 45° gegen die Erzeugende viermal so groß wie die größte Schubspannung in der Welle wird. Diese starke Spannungserhöhung bedingt je nach der Theorie des Bruches, welche man anwendet, eine 2—3fache Erhöhung der Bruchgefahr, woraus sich die Beobachtungen aus der Praxis ungezwungen erklären.

Vorrichtung zum Messen von Stößen. Einen Apparat zum Messen von Stößen beschreibt H. Kreuger im Bauingenieur (1904, Heft 4). Benutzt wird die Abplattung einer Kugelschale unter Druck auf eine harte ebene Unterlage, welche nach der Theorie der Härte von H. Hertz mit großer Genauigkeit ermittelt werden kann. Voraussetzung ist dabei natürlich, daß bei der Messung niemals die Proportionalitätsgrenze des Materials überschritten wird. Bei dem verwendeten Chromstahl darf nach Kreuger mit einer zulässigen Höchstspannung von 35000 at gerechnet werden. Um nun zur Messung großer Stöße nicht unbequem große Kugeln verwenden zu müssen (unter der obigen Bedingung darf nämlich der Durchmesser der Berührungsfläche nicht größer als der zehnte Teil des Radius werden) kann man ohne merkbaren Fehler einen zylindrischen Ausschnitt aus der Kugel verwenden und die ganze Vorrichtung in einem kleinen Apparat vereinigen, den Kreuger als „Kugeldose" bezeichnet. Der Durchmesser der Berührungsfläche, welche durch Ruß oder (unter Wasser) durch Kupferüberzug kenntlich gemacht werden kann, wird mikroskopisch gemessen. Der Verfasser glaubt, daß man mit diesem Apparat die Stoßkraft des Wogenschlages, ja sogar den aktiven und passiven Erddruck bestimmen kann. Ob die Kugeldose alle diese Aufgaben auch wirklich lösen kann, können natürlich nur gründliche Versuche zeigen, die offenbar noch ausstehen.

H. Hencky. 72

Die freien Querschwingungen von dünnen Balken mit veränderlichem Querschnitt (oder die analytisch gleichwertige Aufgabe ihrer Torsionsschwingungen) haben technisch mancherlei Interesse. Es sei nur an die Probleme der Lavalwellen erinnert. R. V. Southwell (Philos. Magaz. 41, 1921 S. 419) entwirft ein graphisches Verfahren zur Bestimmung der niedrigsten Frequenz. Mathematisch wird hierbei nichts Neues geboten; es handelt sich um Anpassung bekannter graphischer Integrationsverfahren an das vorliegende simultane System von Differentialgleichungen. Es wird, zunächst unter Außerachtlassung einer der Randbedingungen, für eine willkürlich angenommene Frequenz integriert und dieser Vorgang für andere Frequenzen wiederholt, schließlich durch Interpolation diejenige Frequenz, eben die gesuchte, gefunden, die auch die letzte Randbedingung erfüllt. Sie ergibt sich nach wenigen Schritten mit ca. 1 vH Genauigkeit, in einem Fall, für den der Vergleich mit dem Ergebnis der analytischen Durchführung gezogen werden kann.

Derartige Wege müssen gewiß in der Technik vielfach Verwendung finden. Dagegen kann man den allgemeinen Bemerkungen des Verfassers über den Vorzug der graphischen Methoden gegenüber den analytischen, weil ihre Durchführbarkeit nicht an spezielle Voraussetzungen gebunden sei, nicht ohne weiteres zustimmen. Es kommt auch in der Technik vielfach weniger darauf an, spezielle numerische Resultate als allgemeine Gesetzmäßigkeiten zu erkennen, die meist nur auf analytischem Wege erhalten werden, wenn auch unter geeignet zu wählenden Voraussetzungen. Auf dem graphischen Wege z. B. die höheren Frequenzen zu erhalten, wäre schon ein ungleich mühsameres Verfahren und allgemeine Regeln lassen sich so überhaupt nicht ableiten.

Schwingungen des mehrfach gelagerten Balkens von unveränderlichem Querschnitt. Wir haben dabei Gesetze solcher Art im Auge, wie ein an anderer Stelle (Philos. Mag. 41 1921, S. 81) von E. H. Darnley abgeleitetes. Dieser untersucht die Schwingungen eines mehrfach unterstützten Balkens von gleichförmigem Querschnitt (bezw. das entsprechende Torsionsproblem). Die elementaren Rechnungen werden für verschiedene Anordnungen durchgeführt. Es ergibt sich das bemerkenswerte Resultat, daß die niedrigste Eigenfrequenz bei vorgegebener Anzahl der Stützpunkte dann am kleinsten ausfällt, wenn die Endpunkte aufgelagert sind und alle Stützpunkte gleiche Abstände von einander haben. Für mehr als zwei Stützpunkte reicht der benutzte Weg allerdings nur aus, um ein relatives Minimum für diesen Fall zu beweisen. In dem Ansatz des Verfassers sind übrigens die Mittel enthalten, um die Untersuchung auf die höheren Frequenzen auszudehnen.

F. Noether 81

Experimentelle Ermittelung ebener Verschiebungs- und Spannungszustände. Der Einfluß von Löchern, scharfen Übergängen oder sonstigen Unstetigkeiten auf die Beanspruchung eines irgendwie belasteten Körpers spielt für Festigkeitsberechnungen eine große Rolle. Der konstruierende Ingenieur ist hierbei in der Regel auf rohe Erfahrungstatsachen oder gar nur auf sein Gefühl angewiesen, um

seiner Konstruktion Abmessungen zu geben, die die Gefahr einer Überanstrengung des Materials an solchen Stellen verhüten. Genaue Kenntnisse über die Spannungsverteilung in der Umgebung dieser Stellen haben wir nur in den wenigsten Fällen. Beim ebenen Spannungszustand ist nur der Fall des einfach durchlochten Bleches oder Stabes auf Grund der Elastizitätstheorie in guter Übereinstimmung mit Versuchen gelöst sowie der Fall der zweifach durchlochten Platte; letztere nur experimentell. Herr Dr.-Ing. D. Rühl hat in einer Arbeit (Forschungsarbeiten, herausg. vom Verein deutsch. Ingen., H. 221, 1920) den Kreis der Lösungen um einen weiteren, praktisch wichtigen Fall erweitert, indem er durch sorgfältige Versuche mittels eines neuen, für diesen Zweck von ihm erbauten, hochempfindlichen Gerätes den Formänderungszustand und damit auch den Spannungszustand in einer durch zwei Nietbolzen gespannten rechteckigen Platte aus Flußeisen untersucht. Wie der Verfasser zeigt, läßt sich eine theoretische Lösung durch Überlagerung bekannter nicht angeben. Die Anordnung der Versuche ist von dem Gesichtspunkt aus durchgeführt worden, den Weg für eine etwaige spätere theoretische Lösung zu ebnen. Die Verschiebungen und Spannungen sind für die verschiedenen Schnitte in übersichtlicher Anordnung zur Darstellung gebracht. Die Nieten, die mit einem Spielraum von etwa 0,2 mm in die Löcher eingepaßt sind, verursachen in der unmittelbaren Umgebung derStellen des Lochrandes, wo sie bei der Belastung anliegen, schon bei verhältnismäßig geringer Belastung Überschreiten der Proportionalitätsgrenze. Die Messungen zeigen, daß die dadurch hervorgerufene örtliche Störung im Spannungszustand nur einen geringen Einflußbereich besitzt. An bemerkenswerten Ergebnissen sei ferner die beobachtete 2,82-fache Spannungserhöhung im Querschnitt durch die Nietmitte am Lochrand gegenüber gleichmäßiger Verteilung erwähnt. Um ein ungefähres Bild von der Formänderung zu gewinnen, wurde der gleiche Versuch an einer Bleiplatte von den gleichen Abmessungen wie die Flußeisenplatte vorgenommen und die hierbei eintretenden bleibenden Gestaltsänderungen durch die Verkrümmung der ursprünglichen Geraden eines auf der Oberfläche eingezeichneten, rechtwinkligen Netzes zur Anschauung gebracht. Für einen Vergleich mit dem Verhalten der gespannten Flußeisenplatte noch besser geeignet dürfte eine entsprechende Gummiplatte sein. Mit einfachen Modellen aus Gummi lassen sich die Formänderungen, die bei Festigkeitsuntersuchungen eine Rolle spielen, besonders einfach und anschaulich zur Darstellung bringen. Es sei in diesem Zusammenhang erwähnt, daß solche Gummimodelle neuerdings mit Erfolg als Anschauungsmittel für die Vorlesung über Festigkeitslehre an der Technischen Hochschule Dresden Verwendung finden.

Festigkeitsberechnung der Schwungräder. Für die Festigkeitsberechnung von Schwungrädern sind in der Praxis zwei verschiedene Verfahren üblich. Das erste, von Grashof eingeführte, geht von der Annahme aus, daß die Querschnitte des Schwungradkranzes eben bleiben, während dem zweiten die Annahme des Geradliniengesetzes für die Verteilung der Spannungen über den Querschnitt zu Grunde liegt. Für Schwungräder mit geringem Werte des Verhältnisses von Kranzdicke zum Halbmesser des Kranzes erhält man nach beiden Verfahren praktisch die gleichen Ergebnisse; dagegen können die Unterschiede bei schweren Rädern, bei denen dieses Verhältnis größere Werte annimmt, beträchtlich werden. Um über die Brauchbarkeit beider Verfahren in diesem Fall zu entscheiden, hat sich Herr Dr.-Ing. K. Reinhardt (Forschungsarbeiten, herausg. vom Verein deutsch. Ingen., H. 226, 1920) der mühsamen, aber für die Praxis bedeutungsvollen Aufgabe unterzogen, den Spannungszustand im Schwungrad von rechteckigem Kranzquerschnitt nach der Elastizitätstheorie in allen Einzelheiten durchzurechnen. Wie der Verfasser zeigt, kann man den Spannungszustand mit hinreichender Genauigkeit als einen rein ebenen ansehen. Soweit man nur die Beanspruchung des Schwungringes durch Fliehkräfte allein in Betracht zieht, stimmt selbstverständlich die genaue Theorie mit der oben erwähnten ersten Annahme überein, daß die Querschnitte eben bleiben, wie aus Symmetriegründen ohne weiteres hervorgeht. Die Armkräfte verursachen dagegen eine Krümmung der Kranzquerschnitte. Da jedoch in der Regel die Beanspruchung durch die Armkräfte gegenüber der durch die Fliehkräfte zurücktritt, so dürfte die erstgenannte Annahme, bei der die Querschnitte als eben angenommen werden, in diesen Fällen eine gute Näherung liefern, was durch die genaue Theorie auch bestätigt wird. Soweit die Armkräfte überhaupt von Bedeutung für den Spannungszustand sind, ist die Art, wie sie auf der Innenbegrenzung des Schwungringes verteilt angreifen, von maßgebendem Einfluß. Der Vergleich der genauen Theorie mit den Ergebnissen aus dem zweiten der oben angeführten Näherungsverfahren, wobei ein lineares Spannungsverteilungsgesetz für den Kranzquerschnitt angenommen wird, zeigt, daß letztere Annahme unter Umständen bei schweren Rädern eine zu geringe Beanspruchung liefert, wobei der Fehler bis zu 25 vH betragen kann, wie an Beispielen gezeigt wird. Auch unter Zugrundelegen der ersten Annahme sind Unterschätzungen der Spannungen in dieser Größenordnung möglich, so daß das folgende Gesamtergebnis gezogen werden kann: Für leichte Räder, wo das Verhältnis der Kranzdicke zum Radius des Schwungringes klein ist, liefern beide in der Praxis gebräuchliche Verfahren gleich brauchbare Werte für die Spannungen, während bei schweren Rädern beide Verfahren unter Umständen eine Unterschätzung der Spannungen bis zu 25 vH liefern können.

Abgesehen von den angeführten, praktisch wichtigen Berechnungen der Schwungräder,

die den größten Teil der Arbeit ausmachen, gibt der Verfasser im vorletzten Abschnitt eine „Herleitung der Spannungsgleichungen einer dünnen Scheibe aus den Grundgleichungen der Elastizitätstheorie ohne Zuhilfenahme einer Spannungsfunktion" und ferner im letzten Abschnitt „die allgemeine Lösung der Differentialgleichung für die Spannungsfunktion in einem Kreisring von rechteckigem Querschnitte". Beide Fragen sind bisher noch an keiner andern Stelle in dieser Vollständigkeit und Gründlichkeit behandelt worden, so daß die Arbeit von Herrn Dr.-Ing. Reinhardt neben den praktisch wertvollen Ergebnissen auch in theoretischer Hinsicht vielfache Fortschritte und Anregungen vermittelt.

L. Föppl, Dresden. 44

In dem ersten Aufsatze der Müller-Breslau-Festschrift (Der Eisenbau 12, 1921, Heft 5/6): **„Die Ergänzungsenergie elastischer Systeme"** (S. 100—107) stellt O. Domke, Aachen, den im Titel benannten neuen Begriff

$$U_e = \Sigma(Ts) + \Sigma(Pw) - U$$

auf, wo T = absolute Temperatur, s = Entropie, P = äußere Kräfte, w = Verschiebungen derselben und U = innere Energie des betrachteten Systems sind. Da dU nach dem ersten Hauptsatz der Wärmetheorie ein vollständiges Differential ist, so

$$\frac{\partial U_e}{\partial P_m} = w_m \qquad \frac{\partial U_e}{\partial T_n} = s_n,$$

Daraus folgt: „Wenn nirgends Wärme zu- oder abgeführt wird, so machen die statisch unbestimmten Größen sowie die Temperaturen die Ergänzungsenergie zu einem Kleinstwert". Ebenso ist der verallgemeinerte Satz von Betti leicht abzuleiten. An dem Beispiel eines Stabes von der Länge l und dem Querschnitt F werden zunächst die aus der Wärmetheorie für Gase bekannten Begriffe der beiden verschiedenen spez. Wärmen auseinandergesetzt und sodann unter Voraussetzung linearer Beziehungen für die elastischen und Wärmeänderungen die Ergänzungsenergie desselben

$$U_e = \Sigma \frac{S^2 l}{2 E_i F} + \Sigma S \alpha l (T - T_0) + \Sigma c_p \gamma F l T \left(\ln \frac{T}{T_0} - 1\right),$$

sowie schließlich in analoger Form diejenige eines beliebigen elastischen Systems berechnet (Bezeichnungen nach Müller-Breslau, Neuere Methoden). Es werden nun isotherme und adiabatische Änderungen untersucht, da beide Fälle keineswegs übereinstimmen. Diese Betrachtung führt schließlich zur Annahme eines adiabatischen und eines isothermen Elastizitätsmoduls, deren ersterer für Eisen mit

$$E_a = E_i \frac{c_p}{c_v} = 2\,150\,000 \cdot 1{,}002\,280 = 2\,154\,900$$

numerisch ausgerechnet wird, und der streng genommen bei schnell wechselnden Belastungen ohne Temperaturausgleich benutzt werden müßte.

In dem Aufsatze: **„Über das Gleichgewicht von rechteckigen und elliptischen Platten unter einer Einzellast"** (S. 107—122) bietet Hans Happel, Breslau, einen Beitrag zur Plattentheorie. Die bekannte Greensche Funktion gibt, mit r^2 multipliziert, eine Lösung der in einem Punkte unstetigen Plattenprobleme. Nach Kneser lautet dieselbe:

$$G(x, y, 0, 0) = -\frac{8}{a b \pi} \sum_m \sum_n \frac{\cos \frac{m \pi x}{a} \cos \frac{n \pi y}{b}}{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}}$$

wo x, y die rechtw. Koordinaten in bezug auf ein Koordinatensystem durch die Mitte der rechteckigen Platte und a, b die Rechteckseitenlängen sind. Die Funktion wird durch zwei Funktionen F_1 und F_2 ergänzt, wodurch die Anpassung an die gegebenen Randbedingungen der am Rand eingespannten Platte bewirkt wird. Die Auffindung der Funktionen F_1 und F_2 gelingt durch Entwicklung nach doppelt unendlichen Fourierschen Reihen.

Die Lösung für die elliptische eingeklemmte Platte mit einer Einzellast in der Mitte gelingt in ähnlicher Weise. Hier wird der Ansatz:

$$w = A \{ r^2 (l(r) - {}^1\!/_2) + F(x, y) \}$$

gebraucht und nun die Zusatzlösung $F(x, y)$ nach Einführung elliptischer Koordinaten α und β so bestimmt, daß die Bedingungen des eingeklemmten Randes von der Gesamtlösung erfüllt werden. Dies geschieht durch zwei einfach unendliche Reihen.

Schließlich wird eine rechteckige Platte auf nachgiebiger Unterlage mit einer Einzellast in der Mitte unter Benutzung des Ritzschen Verfahrens behandelt. Nach den verschiedenen Fehlern in Zahlenrechnungen, die andere Verfasser der Benutzung des Ritzschen Verfahrens verdanken, dürfte auch hier bei dem am Schlusse gebotenen Zahlenbeispiel wegen der Benutzung nur weniger Glieder ein geringer Zweifel an genügender Genauigkeit erlaubt sein.

„Die Berechnung der Rahmengebilde" von A. Hertwig, Aachen, (S. 122—129) wendet den Grundgedanken der Lösung des dreifach statisch unbestimmten Rahmens durch drei Gleichungen mit je nur einer Unbekannten auf die Rahmenreihe aus derartigen Einzelrahmen an. Denkt man sich nur einen Rahmen r in der bekannten von Müller-Breslau herrührenden Art aufgeschnitten und die Schnittstellen durch steife Scheiben bis zum Systemschwerpunkt verlängert, so wird die Berechnung der hier anzubringenden drei Überzähligen Z_1^r, Z_2^r, Z_3^r offenbar möglich, wenn die Verschiebungen des $(n-3)$-fach statisch unbestimmten Hauptsystems bekannt sind. Dabei braucht man für die Biegungsmomente in den Ausdrücken der δ_{ik} nur einmal die Momente des $(n-3)$ statisch unbestimmten Systems einführen, die zweiten Momente dürfen die des statisch bestimmten Hauptsystems sein. Es werden nun die Bedingungen erörtert, unter

denen die Z_i^r durch je eine Gleichung mit einer Unbekannten ausgedrückt werden können. In den elastischen Massen des r-ten Rahmens sind hier gewisse Zuschlagmassen aus den Teilen, die der r-te Rahmen mit seinen Nachbarrahmen gemeinsam hat, bezw. die statischen Momente derselben hinzuzufügen. Zum Schluß wird ein Weg zur Berücksichtigung der Normalkräfte gewiesen. An anderer Stelle soll ein durchgerechnetes Beispiel geboten werden. Das Ziel ist, den Rechnungsgang günstiger mit Rücksicht auf die Abrundungsfehler zu gestalten und auch bei hochgradiger statischer Unbestimmtheit mit dem Rechenschieber auszukommen.

In **„Der Windverband von Hängebrücken sehr großer Spannweiten“** (S. 129—138) betrachtet W. Schachenmeier, München, die Schwierigkeit, die bei schmalen aber weitgespannten Brücken die Konstruktion des Windträgers bereitet. Für Hängebrücken werden zwei horizontale Seilträger vorgeschlagen, die durch Querstäbe mit einander verbunden, und durch Stützriegel gegen die Pylonen abgestützt sind. Es wird sodann eine Berechnung dieser Windträger geboten und an einem Zahlenbeispiel einer Brücke von 1000 m Spannweite gezeigt, daß für den Windträger gegenüber der normalen Ausführung nur 40 % an Material gebraucht wird.

In dem **„Verfahren zum schnellen Abbau und Einbau einer aus mehreren Blechträgerüberbauten bestehenden Brücke“** (S. 138—147) beschreibt Geheimer Baurat Schaper den Abbruch der anstelle der gesprengten Eisenbahnbrücken bei Warschau errichteten Notbrücke vermittelst eines Rückbaukranes. Dieser von der Firma Gollnow, Stettin, erbaute Kran steht auf einem eigens konstruierten auf dem Eisenbahngleis fahrbaren Untergestell und hat einen so langen Kragarm, daß er die Spannweite der abzubauenden Öffnungen bequem überspannte. Er vermochte die etwa 25 m langen Blechträger der Notbrücke von 21 t Schwere zu heben und auf Eisenbahnwagen zu verladen. Bei der Jurabrücke bei Tauroggen wurde derselbe Kran zum Wiederaufbau benutzt. Die Montage des Krans aus wenigen Stücken vermittelst zweier Ständerbäume ist besonders einfach.

„Über die Stabilität versteifter Platten“ (S. 147—163) berichtet S. Timoschenko, Agram. Ist der bekannte Ausdruck für die potentielle Biegungsenergie der Platte V und V_1 die Energieverminderung des betrachteten Zustandes durch die Ausbeulung, so ist die Bedingung

$$V = V_1$$

das Knickkriterium. Für die vierseitig frei aufgelagert gedachte rechteckige Platte a, b ist die Ausbeulung w

$$w = \Sigma\Sigma A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

darstellbar, woraus

$$V = \frac{\pi^4 D}{2} \frac{ab}{4} \Sigma\Sigma A_{mn}^2 \left(\frac{m^2}{a} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2$$

folgt. Für V_1 sind die Ausdrücke je nach der Beanspruchungsart verschieden, enthalten aber die betrachtete Beanspruchung selbst als einen Faktor, so daß aus der Gleichung $V = V_1$ die kritische Spannung σ_{kr} als Quotient folgt. Unter Wirkung des einfachen Druckes ist z. B.

$$\sigma_{kr} = \sigma_e \left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b}\right)^2$$

Es wird nun der Einfluß von biegsamen Steifen parallel einer der Seiten betrachtet, wobei V und V_1 Zusatzglieder aus der Energie der Steife erhalten. Auch für die am Rande von Schubkräften beanspruchte Platte wird ein Verfahren gezeigt. Schließlich wird noch der für den Steg von Blechträgern wichtige Fall eines exzentrischen Druckes oder Zuges der Platte entsprechend einer Verteilung

$$\sigma_x = \sigma_0 \left(1 - \frac{y}{\alpha b}\right)$$

der Normalspannungen berücksichtigt. Nach analogem Verfahren führt hier und bei dem vorigen Problem die Gleichung für $\sigma_{0\,(kr)}$ zu einem Ausdruck, dessen A_{mn} wegen der Minimumsbedingung für $\sigma_{0\,(kr)}$ aus einer Reihe von linearen Gleichungen zu berechnen sind. Elf Zahlentafeln und ein Beispiel veranschaulichen aufs beste die theoretischen Ergebnisse.

Lewe. 89

BUCHBESPRECHUNGEN

FELIX **KLEIN,** Gesammelte mathematische Abhandlungen, 1. Bd. Liniengeometrie, Grundlegung der Geometrie, zum Erlanger Programm. Herausgegeben von R. Fricke und A. Ostrowski. Berlin, Verlag von Julius Springer, 1921.

Wie schon im ersten Heft dieser Zeitschrift kurz angezeigt worden ist, hat eine Stiftung zum goldenen Doktorjubiläum von Klein am 12. Dezember 1918 trotz der Not der Zeit es ermöglicht, den ersten Band der gesammelten Werke des großen Forschers und Lehrers herauszubringen. Dabei ist besonders wertvoll, daß Klein ausführliche und sehr anziehende biographische und historische Bemerkungen beigesteuert hat, die es erleichtern, die Zusammenhänge zwischen den einzelnen Arbeiten Kleins untereinander und mit den Arbeiten der zeitgenössischen Mathematiker zu erkennen. Da Klein wie kaum ein zweiter anregend und angeregt mitten in der Entwicklung der modernen Mathematik gestan-

den hat, gewinnt man aus diesen Bemerkungen einen tiefen Einblick in die neuere Entwicklung unserer Wissenschaft. Die Gesamtausgabe soll drei Bände umfassen, und zwar ist, wie der Referent hört, die Fortführung gesichert.

Der vorliegende Band enthält die geometrischen Arbeiten Kleins, die in dem „Erlanger Programm" vom Jahre 1872 gipfeln, und die neuen mit diesem Erlanger Programm zusammenhängenden Untersuchungen zur Relativitäts- und Gravitationstheorie Einsteins. Kleins Denk- und Arbeitsweise ist (übrigens auch in seinen die Analysis betreffenden Arbeiten) typisch geometrisch, was man in unserer heutigen mathematischen Entwicklung, die vielfach aufs logisch abstrakte und arithmetische gerichtet ist, beim Überblick über Kleins geometrisches Gesamtwerk besonders stark empfindet, so daß man in einer melancholischen Spengler-Stimmung versucht ist, ihn als den „letzten" Geometer zu bezeichnen. Sein wunderbarer Spürsinn für verborgene Zusammenhänge, die erst hinterher naheliegend erscheinen, sein „höherer Standpunkt" ermöglichen ihm, eine harmonische Ordnung in unsere weitverzweigte Wissenschaft zu bringen.

Das wichtigste ordnende Prinzip der Geometrie hat Klein 1872 im Alter von 23 Jahren in seiner Erlanger Antrittsrede auseinandergesetzt, die den Titel führt „Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen" und kurz als „Erlanger Programm" bezeichnet wird. Da dieses auf dem Begriff der Transformationsgruppe fußende ordnende Prinzip einerseits rückwärts gewendet einen klaren Einblick in den Aufbau und in die Entwicklung der Geometrie bietet, andrerseits aber im höchsten Grade als Leitstern für die Forschung sich bewährt und für die Anwendungen fruchtbar erwiesen hat, darf an dieser Stelle vielleicht darüber einiges ausgeführt werden.

Von der Algebra her, es sei nur an die Schöpfungen von Galois erinnert, ist der Begriff der Gruppe gekommen. Beispiele für Gruppen von Transformationen sind die Schiebungen (Translationen), die Drehungen um einen Punkt, die Kollineationen u. s. f. Die kennzeichnende Eigenschaft einer Gruppe von Transformationen ist, daß die Aufeinanderfolge zweier Transformationen aus der Gesamtheit wieder durch eine einzige Transformation aus der Gesamtheit ersetzt werden kann, daß also die Zusammensetzung von Transformationen der vorgegebenen Schar nicht aus der Schar herausführt. Beispielsweise bilden die Spiegelungen an den Ebenen unseres Euklidischen Raumes eine Schar von Transformationen, die nicht die Gruppeneigenschaft hat.

Schon seit langer Zeit — besonders deutlich wird diese Tatsache bei Moebius — hat man mehrere Zweige der Geometrie getrennt voneinander betrachtet, so z. B. die projektive Geometrie einerseits und die Geometrie der reziproken Radien oder „Kreisverwandtschaften" andrerseits. Klein hat nun folgendes Einteilungsprinzip aufgestellt: Zu jeder Gruppe von Transformationen — man wird in diesem Zusammenhang meist an stetige Gruppen denken — gehört eine bestimmte Art von Geometrie oder „eine Geometrie" schlechtweg, nämlich das Studium aller der geometrischen Beziehungen, die bei den Transformationen der Gruppe erhalten bleiben („invariant" sind). Eine Geometrie ist also nichts anderes als die Invariantentheorie einer bestimmten Transformationsgruppe.

In mancher Beziehung ist die einfachste Gruppe von Transformationen die der Kollineationen, die sich in homogenen Koordinaten durch lineare homogene Substitutionen ausdrücken. Die zugehörige Geometrie nennt man heutzutage „projektive Geometrie" — ob man sie mit rechnerischen „analytischen" Hilfsmitteln untersucht oder mit „synthetischen", ist dabei gleichgültig. Früher sprach man von der „Geometrie der Lage" oder auch kurz und ein wenig herausfordernd von „der neueren Geometrie". Hält man nun im Raume der projektiven Geometrie eine Fläche zweiter Ordnung fest, betrachtet man also nur mehr die Gruppe der Kollineationen, die eine Fläche zweiter Ordnung in sich überführen, so erhält man herabsteigend nichts anderes als die vor Klein so geheimnisvolle Geometrie, der man den hilflosen Namen der nicht-Euklidischen gegeben hat. Diese höchst einfache Einordnung der nicht-Euklidischen Geometrie und ihr axiomatischer Aufbau auf Grund der projektiven Geometrie unter Verwertung von Ideen, die man v. Staudt und Cayley verdankt, bildet nach seinen Untersuchungen zur Liniengeometrie die erste große geometrische Entdeckung Kleins aus dem Jahre 1871. Je nachdem man die Fläche zweiter Ordnung, das sogenannte absolute Gebilde der betreffenden Geometrie, wählt, bekommt man die verschiedenen Arten von nicht-Euklidischer Geometrie. Betrachtet man endlich die absolute Fläche zweiter Ordnung als Umhüllungsgebilde ihrer Ebenen und läßt sie in einen Kegelschnitt zusammenschrumpfen, so ergibt sich als Grenzfall der nicht-Euklidischen Geometrie die alte Geometrie Euklids. Auf diese Weise erscheinen die „metrischen" Invarianten der Geometrie Euklids (man spricht auch von „Elementargeometrie") als Sonderfälle projektiver Beziehungen, bei denen ein ausgezeichneter Kegelschnitt, der sogenannte „absolute Kegelschnitt" eine Rolle spielt. So läßt sich beispielsweise, wie Laguerre schon als Schüler 1853 bemerkt hat, der Begriff des Winkels auf den des Doppelverhältnisses zurückführen. Wenn man statt im projektiven Raum eine Fläche zweiter Ordnung festzuhalten, eine Ebene als Ganzes in Ruhe läßt, die sogenannte „uneigentliche" oder „unendlich ferne" Ebene, so erhält man die affine Geometrie, der z. B. ein großer Teil der Vektorrechnung angehört.

Wie man auf diese Weise absteigend von der projektiven Geometrie immer inhaltsreichere Geometrien erhält, die zu Untergruppen der allgemeinen projektiven Gruppe gehören, so kann man auch aufsteigend zu

Geometrien kommen, die umfassenderen Gruppen entsprechen. Wenn man von gewissen mengentheoretischen Untersuchungen absieht, ist die umfassendste Gruppe von Transformationen, die man näher untersucht hat, die Gruppe aller stetigen und eineindeutigen Abbildungen des Raumes. Die zugehörige Geometrie nennt man Analysis Situs oder Topologie. Je höher man aufsteigt, desto ärmer werden die Geometrien, desto schwieriger die Beweise, schon dadurch, daß die bequemen Hülfsmittel der Analysis immer mehr versagen, aber dafür auch desto umfassender die Ergebnisse. Gerade in neuester Zeit hat man erfolgreiche Vorstöße in die „hehre Einsamkeit" der Topologie gewagt; und hier sind vielleicht die entscheidenden Fortschritte der Geometrie zu erhoffen.

Eine etwas weniger unnahbare Geometrie erhält man, wenn man von unseren eineindeutigen und stetigen Abbildungen auch noch die Differenzierbarkeit fordert und im unendlich Kleinen eine Maßbestimmung einführt durch eine quadratische Differentialform in den Koordinaten x_i

$$ds^2 = \Sigma\, g_{ik}\, dx_i\, dx_k.$$

Im zweidimensionalen Fall ist das ja seit Gaußens Untersuchungen zur Flächentheorie allgemein geläufig. Für eine höhere Zahl von Dimensionen hat Riemann in seiner berühmten Probevorlesung von 1854 die entsprechenden Betrachtungen zu entwickeln begonnen. Heute haben diese weltfremden geometrischen Gedanken durch die Gravitationstheorie Einsteins eine unerhoffte Verwirklichung erfahren; und Klein erlebt den Triumph, daß sein geometrisches Einteilungsprinzip sich auch für die moderne Physik als richtunggebend erweist. Die spezielle Relativitätstheorie von H. A. Lorentz, A. Einstein und H. Poincaré ist nichts andres als die Geometrie einer Gruppe von Kollineationen des vierdimensionalen Raumes, die man als Lorentzgruppe bezeichnet. Die allgemeine Relativitätstheorie Einsteins steht in innigster Beziehung zur Geometrie von Riemann.

Natürlich ist das gruppentheoretische Einteilungsprinzip Kleins, das er in enger Zusammenarbeit mit dem großen norwegischen Geometer Lie, der stetige Transformationsgruppen zuerst systematisch studierte, auf viele Untersuchungen angewendet hat, durchaus nicht das einzige. So spielt beispielsweise bei den Transformationsgruppen mit endlich vielen Parametern die Unterscheidung algebraischer und differentialgeometrischer Untersuchungen eine wesentliche Rolle. Kleins geometrische Untersuchungen beziehen sich zunächst hauptsächlich auf algebraische Gebilde. Dagegen sind in neuerer Zeit die Leitsätze des Erlanger Programms auch für die Differentialgeometrie voll zur Geltung gekommen, vielleicht darf man hierbei an die Untersuchungen zur projektiven Differentialgeometrie und an die Untersuchungen über affine Differentialgeometrie erinnern.

Ein anderer wichtiger Gesichtspunkt, den Klein seinem Lehrer Plücker verdankt, ist die Möglichkeit, statt der Punkte und Ebenen als Bausteine der räumlichen Geometrie höhere Elemente, z. B. gerade Linien oder Kugeln zu verwerten, wodurch unser gewöhnlicher dreidimensionaler Punktraum Träger einer vierdimensionalen Mannigfaltigkeit wird und wodurch es gelingt, z. B. die Lorentzgruppe anschaulich in unserm Raum zu deuten. Auf diese Art kommt man je nach den zugrunde gelegten Transformationsgruppen zu verschiedenen Arten der Linien- und Kugelgeometrie. Der Liniengeometrie im Anschluß an Plücker sind auch die ersten Arbeiten Kleins gewidmet. Klein verdankt man für die Liniengeometrie den ersten brauchbaren analytischen Apparat; was Hesse in seinen Büchern für die projektive Geometrie geleistet hat, hat Klein in den an seine Dissertation anschließenden Arbeiten für die Liniengeometrie durchgeführt, die in innigem Zusammenhang mit der Kinematik und Statik des starren Körpers steht, einem Zusammenhang, dem später insbesondere Ball und Study nachgegangen sind. Der höhere gruppentheoretische Standpunkt verhalf Lie und Klein im April 1870 in Paris zur Entdeckung des merkwürdigen Zusammenhangs zwischen Linien- und Kugelgeometrie und damit verbunden zur Auffindung der Asymptotenlinien auf der Fläche Kummers.

Wie in diesem Falle hat Klein vielfach mit anderen Mathematikern gemeinsam gearbeitet, und neben seinen autographierten Vorlesungen wird die Herausgabe seiner gesammelten Werke dazu beitragen, die Wirkung dieses unvergleichlichen Lehrers zu vervielfachen.

Hamburg, Mathematisches Seminar,
im April 1921.

W. Blaschke. 48.

Dipl.-Ing. ALOYS VAN **GRIES,** Flugzeugstatik. Berlin, Julius Springer, 1921. 379 S. mit 207 Textfiguren.

Der Verfasser, während des Krieges ein Mitarbeiter der Inspektion der Fliegertruppen, gibt in diesem Buche die Zusammenstellung der Erfahrungen, die in Berlin-Adlershof bei der Überprüfung von Flugzeugen gewonnen wurden. Nach Angabe der üblichen Lastannahmen (für Steigflug, Gleitflug, Sturzflug und Oberdruck) wird der Gang der Festigkeitsberechnung an einer normalen Flugzeugzelle erläutert. Die Bestimmung der Stabkräfte der normalen Zelle wird nach verschiedenen Methoden vorgenommen (die naturgemäß auf das gleiche hinauslaufen müssen). Mit der Querverspannung (den Tiefenkreuzkabeln) ist das Tragsystem stereostatisch unbestimmt; es wird die Berechnung der Überzähligen (Tiefenkreuzkabel) gezeigt, die sich bei der symmetrischen Anordnung der Normal-Zelle recht einfach gestaltet. Zum Verständnis für den richtigen Aufbau von Zellen werden dann die Bildungsgesetze von Raumfachwerken behandelt. Hieran schließt sich die Berechnung der Trag-

flächenholme. Als Grundlage dienen die Formeln, die H. Müller-Breslau in seiner Graphischen Statik der Baukonstruktionen (II/2, Leipzig 1908, S. 286) für durchgehende Stäbe entwickelt, die gleichförmig querbelastet und in jeder Öffnung durch eine Längskraft beansprucht sind. Es werden mehrere Beispiele durchgerechnet und die Ergebnisse mit jenen der Näherungsformeln von Vianello, Krohn und Müller-Breslau verglichen. Das Nullsetzen der Nennerdeterminante der aufgestellten Dreimomentengleichungen liefert die Knickbedingung des Holmes, die für einige Sonderfälle diskutiert wird. Es erschiene erwünscht, hier ein Rechnungsverfahren aufzunehmen, das den Einfluß der Innenverspannung, d. h. die Wirkung verschiedener Längskräfte innerhalb einer Öffnung berücksichtigt. Eine Übersicht der Festigkeitszahlen der im Flugzeugbau verwendeten Materialien beendet den ersten Teil. — Im zweiten Abschnitt des Buches werden einzelne Organe und Anordnungen der Flugzeugzelle untersucht. Es werden die Hauptabmessungen der Zelle (Spannweite der Flächen, gegenseitiger Holmabstand, Systemhöhe, Staffelung) von vielen in- und ausländischen Flugzeugen angegeben und der Einfluß der Abmessungen auf das Gewicht und somit die Flugleistungen besprochen. Dann folgt eine Festigkeitsberechnung der Flügelrippen, die als Träger auf zwei Stützen betrachtet werden und die Erörterung der Ausbildung des Spannturms, der Kabeln und der Innenverspannung. Weiter findet man Studien über die günstigste Stellung der Flugzeugstiele, d. i. jene Stellung, bei der das Zellengewicht einen Kleinstwert erreicht, über die Wirkung exzentrisch angreifender Längskräfte im Holm, und über die Vorspannung der Kabel. — Im dritten Teil sind als Beispiele verschiedene Flugzeuge (Eineinhalbdecker-Nieuport, Zweidecker und Dreidecker) beschrieben. Auch einige geplante, nicht zur Ausführung gelangte Konstruktionen werden mitgeteilt. Als solche wären zu nennen: ein (von Prof. Prandtl empfohlenes) biegungssteifes Zellensystem ohne Diagonalen, der Vorschlag, die Tragflächenholme bogenförmig herzustellen, sowie jener, ein sogenanntes getrenntes Biegungs- und Knickgefüge der Holme, d. h. getrennte Holme zur Aufnahme der Längskräfte und der Querlasten, zu verwenden. Die Untersuchung des außerhalb der Zelle liegenden Teile, wie Fahrgestell, Leitwerk, Rumpf usw. soll nach Angabe des Verfassers gegebenenfalls in einem später zu veröffentlichenden vierten Abschnitt des Buches erfolgen. Aber auch von den Organen der Zelle selbst sind die eigentlichen Festigkeitsberechnungen — die doch wohl innerhalb einer „Flugzeugstatik“ Platz finden sollten — recht vernachlässigt; Verfahren, die in der Statik allgemein üblich sind, könnten dafür etwas kürzer dargestellt werden. Das Buch bringt auch einiges über „Flugzeugberechnungen außerhalb Deutschlands“. Hierzu mag nicht unbemerkt bleiben, daß ein Vergleich der deutschen Bauvorschriften aus der letzten Kriegszeit, mit den in Österreich zu Kriegsbeginn maßgebenden selbstverständlich nicht angängig ist. — Zur Einführung und als Hilfsmittel beim Entwurf wird das Buch dem Flugzeugbauer sicher gute Dienste leisten.

J. Ratzersdorfer. 62.

Dr.-Ing. W. **VAN RINSUM,** Die Wärmeleitfähigkeit von feuerfesten Steinen bei hohen Temperaturen sowie von Dampfrohrschutzmassen und Mauerwerk unter Anwendung eines neuen Verfahrens der Oberflächentemperaturmessung. (Forschungsarbeiten auf dem Gebiete des Ingenieurwesens, herausg. vom Verein deutscher Ingenieure, Heft 228.) Berlin 1920.

Der Inhalt des Werkes, das die Doktor-Ingenieur-Dissertation des Verfassers bildet, zerfällt in vier Abschnitte.

Der erste Abschnitt beschäftigt sich mit der für die Feuerungstechnik so wichtigen Frage der Wärmeleitfähigkeit feuerfester Steine. Es wird ein auf der Kugelmethode mit elektrischer Innenheizung beruhendes Meßverfahren beschrieben, das gestattet, die Untersuchung bis zu 1000° C auszudehnen. Nach dem Verfahren wurden acht verschiedene feuerfeste Steine untersucht. Es wurde gefunden, daß die Wärmeleitzahlen der einzelnen Steine nicht sehr von einander abweichen und daß sie bei allen untersuchten Stoffen beträchtlich mit der Temperatur steigen.

Im zweiten Abschnitt wird auch ein technisch sehr wichtiges Problem behandelt, die Messung von Oberflächentemperaturen. Von der richtigen Erkenntnis ausgehend, daß durch das Anlegen eines Meßinstrumentes an eine heiße Fläche eine Wärmestauung oder eine vergrößerte Kühlung entsteht, versieht der Verfasser das Temperaturmeßinstrument mit einer Kühlfläche veränderlicher Größe, die so einzustellen ist, daß der Wärmefluß durch die Oberfläche, deren Temperatur gemessen werden soll, durch das Anlegen des Meßinstruments nicht geändert wird. Vor dem Versuch ist durch eine Eichung die Größe der Hilfsfläche zu bestimmen. Der Verfasser nennt diese Meßmethode „Verfahren der Abstimmbarkeit“.

In den beiden letzten Abschnitten wird dieses neue und zweifellos recht brauchbare Verfahren benutzt und zwar einmal zur Bestimmung der Wärmeleitzahl von Wärmeschutzmassen für Dampfleitungen und dann zum Vergleich der Wärmeleitzahlen von gewöhnlichem und von Hohlziegelmauerwerk.

Die vorliegende Schrift enthält somit eine Reihe wichtiger neuer Meßmethoden und Versuchszahlen. Ihr eingehendes Studium sollte von keinem Wärmeingenieur unterlassen werden. Darüber hinaus zeichnet sich die Arbeit aber auch dadurch aus, daß der Verfasser die Theorie der Meßverfahren an Hand der Fourier'schen Differentialgleichung der Wärmeleitung eingehend analysiert, so daß sie auch Lesern dieser Zeitschrift, die sich mehr

für angewandte Mathematik interessieren, zur Durchsicht empfohlen werden kann. Neuerdings hat die technische Physik wieder erhöhte Aufmerksamkeit gefunden. Die besprochene Abhandlung stellt ein Paradebeispiel einer gründlichen technisch-physikalischen Studie aus dem Gebiete der Wärmelehre dar und ist deshalb sehr geeignet, das Wesen und die Ziele der technischen Physik jenen Lesern zu erläutern, die sich mit diesem Begriff vertraut machen wollen.

Karlsruhe. Wilhelm Nußelt.

KLEINE MITTEILUNGEN

Maximum und Minimum eines Newtonschen Potentials auf Kugeln. Das Ziel der nachfolgenden Betrachtungen ist, einige dem Hadamardschen „Dreikreisesatze"[1]) in der Theorie der Funktionen komplexer Variabler ähnliche Ungleichungen für ein reguläres Newtonsches Potential aufzustellen.[2]) Der Dreikreisesatz wurde von Hadamard 1896 bei seinen Forschungen über die ganzen transzendenten Funktionen entdeckt, der Hadamardsche Beweis aber erst 1912 gedruckt. So kam es, daß Blumenthal und Faber 1907 den Satz unabhängig voneinander und von Hadamard wiederfanden. Er handelt von der Art des Wachstums des Maximums $M(r)$ des absoluten Betrages einer analytischen Funktion $f(z)$ auf dem Kreise $|z| = r$. Wir werden ihn an späterer Stelle ausdrücklich aussprechen und leiten zunächst die angekündigten potentialtheoretischen Beziehungen her.

Sei eine Kugelschale vorgelegt, innen von einer Kugel vom Radius $\varrho > 0$, außen von einer anderen, konzentrischen vom Radius P begrenzt. Bezeichnen wir den laufenden Radius mit r, so können wir das Innengebiet der Schale durch $\varrho < r < P$ charakterisieren. Dort stelle $\Phi(x, y, z)$ ein reguläres Newtonsches Potential dar, d. h. eine in jedem inneren Punkte eindeutige und samt den partiellen Ableitungen der beiden ersten Ordnungen stetige Lösung der Laplaceschen Differentialgleichung für den dreidimensionalen Raum

$$\Delta \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0.$$

Im Innern der Schale mögen drei konzentrische Kugeloberflächen mit den Radien r_1, r_2, r_3 liegen, und zwar sei

$$\varrho < r_1 < r_2 < r_3 < P$$

(Abb. 1); M_1, M_2, M_3 seien die Größtwerte, μ_1, μ_2, μ_3 die Kleinstwerte von Φ auf jeder der drei Kugeloberflächen. Bezeichnet k eine Konstante, so stellt

$$\frac{k}{r} + \Phi$$

ein in und auf der eingelagerten Schale mit dem inneren Radius r_1 und dem äußeren r_3

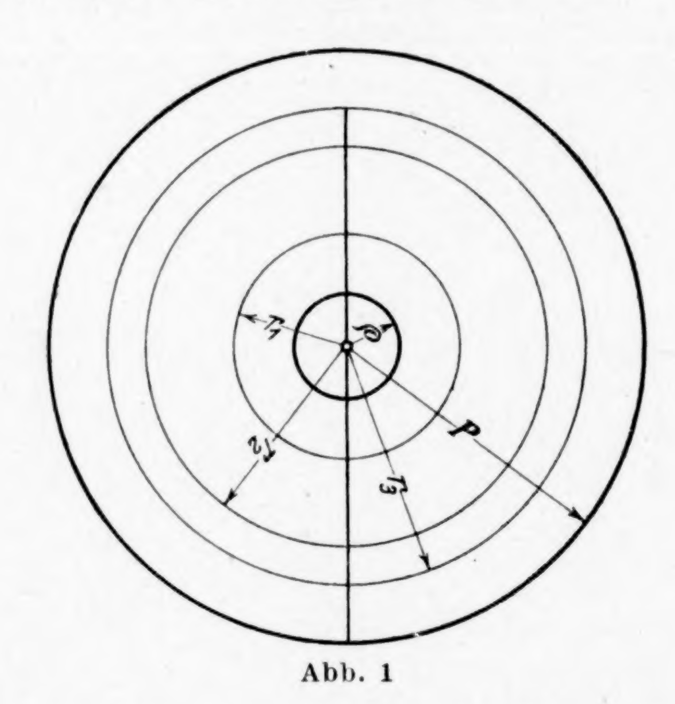


Abb. 1

reguläres Newtonsches Potential dar. Denn bekanntlich ist

$$\frac{1}{r} = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}$$

eine spezielle Lösung der Laplaceschen Gleichung, ebenso wie Φ. Die Gleichung ist linear und homogen, daher liefert auch $\frac{k}{r} + \Phi$ eine Lösung. Die Funktion $\frac{k}{r} + \Phi$ erreicht für die eingelagerte Schale sowohl Maximum wie Minimum auf der Oberfläche; diese wichtige Eigenschaft eines jeden regulären Potentials war schon Gauß bekannt. Insbesondere kann ihr Maximalwert auf der von der Schale r_1, r_3 umschlossenen Kugeloberfläche vom Radius r_2 nicht größer sein als ihr Maximum auf der Oberfläche:

$$(*) \qquad \frac{k}{r_2} + M_2 \leq \text{Max}\left(\frac{k}{r_1} + M_1,\ \frac{k}{r_3} + M_3\right),$$

wenn wir mit Max (a, b) die größere der beiden Zahlen a und b bezeichnen, und entsprechend beim Minimum:

[1]) E. Landau, Darstellung und Begründung einiger neuerer Ergebnisse der Funktionentheorie, Berlin 1916, S. 13/14 u. 76/77. — L. Bieberbach, Neuere Untersuchungen über Funktionen von komplexen Variablen, Enzykl. d. math. Wiss., Band II, 3, Heft 4, S. 508.

[2]) Sie laufen parallel einer Untersuchung des Verfassers aus der Lehre vom logarithmischen Potential, die in einfacher und natürlicher Weise zum Hadamardschen Dreikreisesatz führt und demnächst in der Mathematischen Zeitschrift veröffentlicht wird.

$$(^{**})\qquad \frac{k}{r_2} + \mu_2 \geq \min\left(\frac{k}{r_1} + \mu_1,\ \frac{k}{r_3} + \mu_3\right).$$

Welche von den beiden Zahlen hinter Max bezw. min die größere bezw. kleinere ist, vermögen wir nicht ohne weiteres anzugeben. Daher wählen wir die Konstante k, über die wir noch freie Verfügung haben, zweckmäßig so, daß die beiden Ausdrücke hinter Max und min je einander gleich werden. Dazu setzen wir in (*)

$$k = \frac{M_3 - M_1}{r_1^{-1} - r_3^{-1}},$$

und in (**)

$$k = \frac{\mu_3 - \mu_1}{r_1^{-1} - r_3^{-1}};$$

dann entstehen nach einfacher Umformung die beiden Ungleichungen

$$M_1\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_3}\right) + M_2\left(\frac{1}{r_3} - \frac{1}{r_1}\right) + M_3\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) \geq 0,$$

$$\mu_1\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_3}\right) + \mu_2\left(\frac{1}{r_3} - \frac{1}{r_1}\right) + \mu_3\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) \leq 0.$$

In Determinantenform lauten sie:

$$(1)\quad \begin{vmatrix} M_1 & \frac{1}{r_1} & 1 \\ M_2 & \frac{1}{r_2} & 1 \\ M_3 & \frac{1}{r_3} & 1 \end{vmatrix} \geq 0, \qquad (2)\quad \begin{vmatrix} \mu_1 & \frac{1}{r_1} & 1 \\ \mu_2 & \frac{1}{r_2} & 1 \\ \mu_3 & \frac{1}{r_3} & 1 \end{vmatrix} \leq 0.$$

Diese Ungleichungen stellen, wie man sieht, eine Beziehung zwischen den Maximal- bezw. Minimalwerten eines regulären Newtonschen Potentials auf drei konzentrischen Kugeloberflächen her und lassen sich leicht anschaulich deuten; wir führen dies für die erste durch.

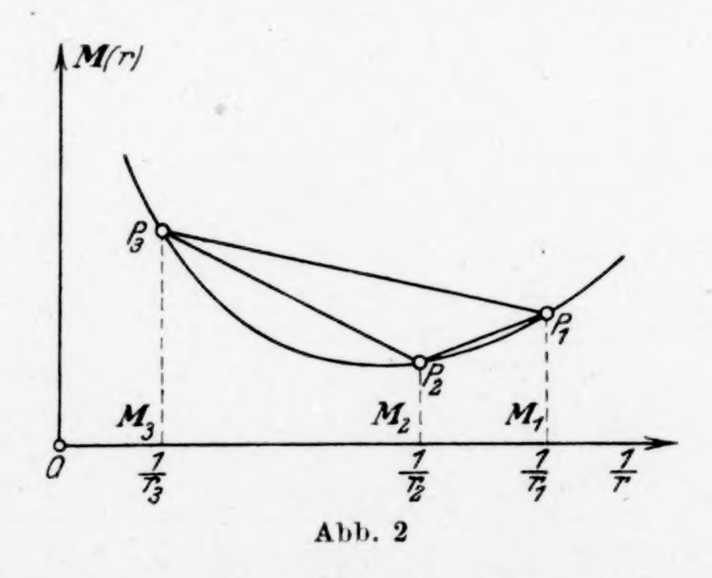


Abb. 2

Tragen wir in einem rechtwinkligen Koordinatensystem als Abszissen die Zahlen $\frac{1}{r}$, als Ordinaten die Zahlen $M(r)$ ein, so gibt die linke Seite von (1) nach einer bekannten Formel der analytischen Geometrie den doppelten negativen Inhalt des von 3 derartigen Punkten P_1, P_2, P_3 gebildeten Dreiecks an. Gemäß (1) erweist er sich als positiv oder null, der Inhalt selbst somit als negativ oder null. Demnach wird bei einer Wanderung von P_1 nach P_2 und P_3 das Dreieck im Uhrzeigersinne umfahren, wenn nicht alle drei Punkte auf einer Geraden liegen. Mithin liegt P_2 unterhalb oder auf der Sehne $P_1 P_3$, und die $M(r)$-Kurve (die nicht analytisch zu sein braucht) ist entweder geradlinig oder erhaben (konvex) nach der $\frac{1}{r}$-Achse hin.

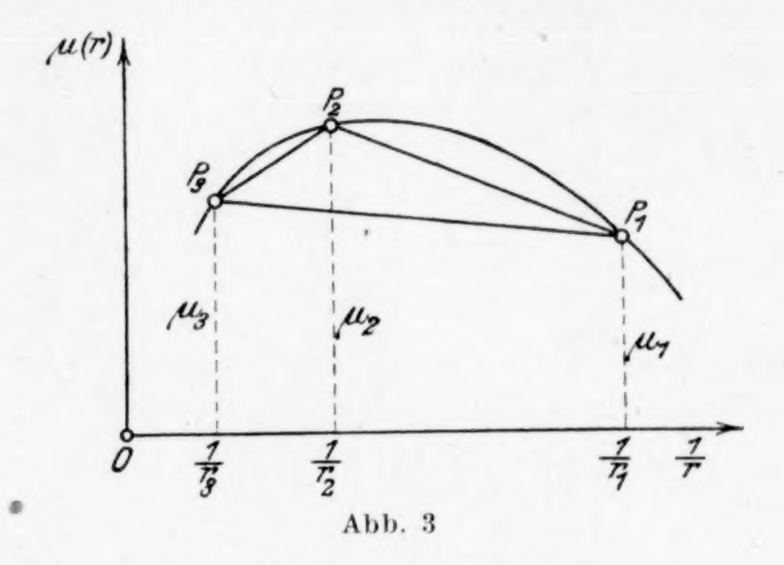


Abb. 3

Ähnliche Überlegungen können wir für (2) anstellen. Den Sachverhalt veranschaulichen Abb. 2 und 3. Wir sprechen ihn in dem Satze aus:

Das Maximum $M(r)$ von Φ auf der Kugeloberfläche vom Radius r ist eine konvexe, das Minimum $\mu(r)$ eine konkave Funktion von $\frac{1}{r}$. Eine lineare Funktion wird dabei als Grenzfall sowohl der konvexen wie der konkaven angesehen.

Ganz ähnlich lautet die Ungleichung des berühmten Hadamardschen Dreikreisesatzes:

$$\begin{vmatrix} \log M_1 & \log r_1 & 1 \\ \log M_2 & \log r_2 & 1 \\ \log M_3 & \log r_3 & 1 \end{vmatrix} \leq 0;$$

hier bedeutet $M(r)$ das Maximum des absoluten Betrages $|f(z)|$ der im Ringgebiete $\varrho < r < P$ analytischen Funktion $f(z)$ auf dem Kreise (r). In Worten: $\log M(r)$ ist eine konvexe Funktion von $\log r$; stets wendet, wenn man r und $M(r)$ auf logarithmischem Papier einträgt, die erhaltene Kurve, wenn sie keine Gerade ist, die erhabene Seite nach unten, nie die hohle (man darf nicht außer acht lassen, daß $\log r$ bei wachsendem r zu-, hingegen $\frac{1}{r}$ abnimmt). Das einfachste Beispiel ist wohl $f(z) = z^m$, $M(r) = r^m$, $\log M(r) = m \log r$ (logarithmische Gerade).

Die Ungleichungen (1) und (2) ermöglichen einen Schluß auf das Verhalten des Maximums $\mathfrak{M}(r)$ des absoluten Betrages von Φ. Wir schreiben dazu (1) und (2) in der Form

$$(1^*)\quad M_1\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_3}\right) + M_2\left(\frac{1}{r_3} - \frac{1}{r_1}\right) + M_3\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) \geq 0,$$

$$(2^*)\quad -\mu_1\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_3}\right) - \mu_2\left(\frac{1}{r_3} - \frac{1}{r_1}\right) - \mu_3\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) \geq 0.$$

Für $M > 0$ $\mu \geq 0$ ist $\mathfrak{M} = M = \mathrm{Max}\,(M, -\mu)$,
„ $M > 0$ $\mu < 0$ „ $\mathfrak{M} = \mathrm{Max}\,(M, -\mu)$,
„ $M \leq 0$ $\mu < 0$ „ $\mathfrak{M} = -\mu = \mathrm{Max}\,(M, -\mu)$;

daher gilt immer

$$\mathfrak{M} = \text{Max}\ (M,\ -\mu).$$

In (1*) und (2*) ist lediglich die mittlere Klammer $\frac{1}{r_3} - \frac{1}{r_1}$ negativ. Doch lehrt das gleichzeitige Bestehen von (1*) und (2*), daß auch die linke Seite der Ungleichung, in der sie mit $\mathfrak{M}_2$, der größeren, sicher positiven der beiden Zahlen M und $-\mu$, multipliziert erscheint, nicht negativ ist. Nehmen wir dann als Faktoren der positiven Klammern $\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_3}$ und $\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}$ in dieser Ungleichung noch $\mathfrak{M}_1$ bezw. $\mathfrak{M}_3$, so bleibt der Sinn der Ungleichung bestehen. Also lesen wir die Beziehung ab:

$$\mathfrak{M}_1\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_3}\right) + \mathfrak{M}_2\left(\frac{1}{r_3} - \frac{1}{r_1}\right) + \mathfrak{M}_3\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) \geq 0$$

oder

$$(3) \qquad \begin{vmatrix} \mathfrak{M}_1 & \frac{1}{r_1} & 1 \\ \mathfrak{M}_2 & \frac{1}{r_2} & 1 \\ \mathfrak{M}_3 & \frac{1}{r_3} & 1 \end{vmatrix} \geq 0.$$

Auch das Maximum $\mathfrak{M}(r)$ des absoluten Betrages eines in einer Kugelschale $\varrho < r < P$ regulären Newtonschen Potentials ist daselbst eine konvexe Funktion von $\frac{1}{r}$.

Dresden-Briesnitz. A. Walther. 54

Neue Forschungen über die Natur der chemischen Elemente. Im folgenden sei kurz über neuere Arbeiten von F. W. Aston berichtet, die einen entscheidenden Schritt in einer Entwicklung von großer Tragweite bedeuten: in der seit Jahren stetig fortschreitenden Umwandlung und Klärung des Begriffes „chemisches Element". Die vorliegende Mitteilung mag nicht allein von dem Standpunkt betrachtet werden, der die Entdeckung neuer, interessanter Tatsachen an sich wertet, sondern auch als Beispiel, wie das Verfahren der modernen, spekulativ gerichteten Physik, Wesen und Aufbau der Materie letzten Endes auf einfache Beziehungen weniger Urbausteine zurückzuführen, das Werk der mehr empirisch-registrierenden Chemie krönt und ordnet.

Schon vor mehr als hundert Jahren stellte W. Prout, ein englischer Arzt, gestützt auf die Tatsache, daß die Atomgewichte aller damals bekannten Elemente, auf Wasserstoff bezogen, auffallend nahe bei ganzen Zahlen lagen, die Hypothese auf, daß die Atome aller schwereren Elemente als chemisch stabile Aggregate eines Uratoms, des Wasserstoffs, anzusehen seien. Diese, von einem sicheren Instinkt für die arithmetische Gesetzmäßigkeit zeugende Auffassung glaubten die Chemiker im Sinne des Dogmas von der Unzerlegbarkeit der Elemente dadurch ad absurdum geführt zu haben, daß sie durch mehr und mehr verfeinerte Meßmethoden in ihren Atomgewichtsbestimmungen bei vielen Elementen Abweichungen von der Einheit um Tausentel und Hundertel, bei einigen wenigen sogar um mehrere Zehntel feststellten; in Form dieser empirisch bestimmten Konstanten wurden die Atomgewichte als Grundlage für die Systematik der Grundstoffe angenommen und man sah jedes Element durch das ihm zugeordnete Atomgewicht in seinem chemischen Verhalten als eindeutig bestimmt an. Die neuesten Atomgewichtstabellen, in denen aus praktischen Gründen Sauerstoff = 16,000 als Bezugswert gesetzt wird, so daß dem Wasserstoff die Zahl 1,008 zugeordnet werden muß, zeigen auf den ersten Blick eine äußerst auffallende Bevorzugung der ganzen Zahlen, die auch durch Anwendung eines statistischen Ganzzahligkeitskriteriums auf die Reihe der Atomgewichte in hohem Maße bestätigt wird.

Die Begriffe „Atomgewicht" und „chemisches Element" gerieten schon durch die radioaktive Forschung in eine arge Krisis. Die neuentdeckten radioaktiven Stoffe sprengten sowohl durch ihre Zahl wie durch ihr Verhalten den Rahmen des periodischen Systems. Die unerhörte Tatsache, daß ein Stoff durch Aussendung korpuskularer Strahlung (positiver α- bezw. negativer β-Teilchen) sich spontan umwandelt, konnte erst auf Grund der Rutherford-Bohrschen Vorstellung[1]) über den Aufbau des Atoms aus einem positiv geladenen Massenkern, der von einer der Kernladungszahl gleichen Anzahl von Elektronen umkreist wird, dem Verständnis näher gebracht werden. Nach Rutherford muß man auch noch den Massenkern selbst als ein Aggregat von einfach positiv geladenen Wasserstoffatomen von der Masse 1, von positiven Heliumatomen mit der Masse 4 und der Ladung 2 (α-Teilchen) und von Elektronen, mit negativer Ladungseinheit und unerheblicher Masse (β-Teilchen) auffassen. Die wirksame Kernladung, durch die die chemischen Eigenschaften eines Elementes eindeutig bedingt werden, ergibt sich als der Überschuß der positiven Ladungseinheiten über die Zahl der Kernelektronen. Mit Hilfe der von Fajans und Soddy aufgestellten „Verschiebungssätze" lassen sich die radioaktiven Stoffe sehr schön in ein neues periodisches System einordnen, in dem nicht mehr das Atomgewicht, sondern die Kernladungszahl resp. die ihr gleiche Ordnungszahl als Einteilungsgrund für das chemische Verhalten der Elemente angesehen wird. Nach einer α-Umwandlung (Erniedrigung des Atomgewichtes um 4 Einheiten, der Kernladungszahl um 2) findet man das entstandene Element zur zweitniedrigeren Gruppe des periodischen Systems von seiner Muttersubstanz verschoben, nach einer β-Umwandlung (gleichbleibendes Atomgewicht, Erhöhung der Kernladungszahl um eine Einheit) findet eine Verschiebung zur nächsthöheren Gruppe statt. Erleidet also ein Element nacheinander zwei β-Umwandlungen und eine α-Umwand-

[1]) Vgl. diese Zeitschr., Bd. 1, 1921, S. 157—159.

lung, so gelangt es, mit gleicher Kernladungszahl, aber mit um 4 vermindertem Atomgewicht, an die Stelle seiner Ausgangssubstanz im periodischen System zurück. Somit ergab sich die Notwendigkeit, mitunter einem (durch die Kernladungszahl bestimmtem) Platze im periodischen System mehrere Elemente von gleichem chemischem Verhalten, aber verschiedenem Atomgewicht zuzuordnen. So sitzen z. B. auf dem Platze des Thoriums (O.-Z. 90) noch fünf radioaktive Elemente, auf dem Platze des Wismut (83) noch 4. Eine Gruppe von Elementen gleicher Ordnungszahl wird Plejade genannt; die einzelnen Glieder der Plejade heißen Isotope.

Z. B. ist das Uranblei (Atomgewicht 206,0) das stabile Endprodukt der Zerfallsreihe des radioaktiven Elementes Uran, ein Isotop des gewöhnlichen, seit alters bekannten Bleis vom Atomgewicht 207,2; zu derselben Plejade gehört aber auch das Endprodukt der Thoriumreihe, das Thoriumblei (A.-G. 208,1). Isotope können, einmal gemischt, durch keinerlei chemische Mittel wieder getrennt werden; sie bilden einen neuen Stoff, dessen Atomgewicht durch die Atomgewichte der einzelnen Bestandteile und das Mischungsverhältnis bestimmt wird. Nach einem Vorschlag von Paneth bezeichnet man Elemente, die nicht als aus Isotopen zusammengesetzt aufgefaßt werden können, als Reinelemente, während ein Isotopengemisch die Bezeichnung „Mischelement“ erhält.

Die Tatsache natürlicher, radioaktiver Umwandlung der Elemente sowie die künstliche Zerlegung des Stickstoffatoms in Wasserstoff und ein Restprodukt, die Rutherford im Jahre 1919 durch sehr energisches Bombardement mit α-Teilchen gelungen ist, ließen den Glauben an die alte, entsprechend modifizierte Proutsche Hypothese, die alle Massenkerne auf den Wasserstoff als gemeinsames Urelement zurückführt, wieder aufleben. So trat, von mehreren Seiten ausgesprochen, mit immer größerer Entschiedenheit das Bestreben hervor, auch diejenigen der nichtradioaktiven Elemente, die Abweichungen vom ganzzahligen Atomgewicht zeigen, als „Mischelemente“ zu erweisen.

In den Jahren 1919/20 ist es Aston gelungen, durch Verfeinerung der schon von J. J. Thomson zum gleichen Zwecke angewandten Kanalstrahlenanalyse das Mittel zu finden, durch das das Atomgewicht von Isotopen bis auf 0,1 vH genau bestimmt werden kann. Die bekannten Grundlagen, auf denen seine Methode fußt, sind folgende: Kanalstrahlteilchen, das sind positiv geladene Materieteilchen, die in einer Entladungsröhre entstehen, erfahren, ein zu ihrer Bewegungsrichtung senkrechtes elektrostatisches Feld durchfliegend, eine Ablenkung von ihrer geradlinigen Bahn, deren Größe ein Maß des Ausdruckes $\frac{e}{m} \cdot \frac{1}{v^2}$ ist, worin e die Ladung des Teilchens, m seine Masse, v seine Geschwindigkeit bedeutet; in entsprechender Weise wird in einem Magnetfelde ihre Ablenkung durch das Produkt $\frac{e}{m} \cdot \frac{1}{v}$ bestimmt. Durch Kombination einer elektrostatischen und magnetischen Ablenkung läßt sich also die Größe $\frac{e}{m}$ und, da die Ladung bekannt ist, die Masse eines solchen einzelnen Materieatoms oder Moleküls feststellen. Aston bringt es durch Konstruktion seines „Massenspektrographen“ dahin, die von einem Punkt divergierend ausgehende elektrische Korpuskularstrahlung, indem er sie nacheinander mehrere feine Spalte, sowie ein elektrisches und magnetisches Feld von geeignet gewählter Richtung zu passieren zwingt, so zu lenken, daß Teilchen von gleichem $\frac{e}{m}$, unabhängig von ihrer Geschwindigkeit, auf einer im Strahlengange angebrachten photographischen Platte eine einzige scharfe „Spektral“-linie einzeichnen. Die Spuren aller im Strahl vorhandenen Strahlengattungen liegen, nach der Größe von $\frac{e}{m}$ geordnet, auf der passend gelagerten photographischen Platte. Aus den Intensitätsverhältnissen der einzelnen Linien läßt sich die relative Zahl der Teilchen von bestimmter Masse feststellen, die während gleicher Zeiten aufgeflogen sind. Aston untersuchte eine große Anzahl von Elementen von Wasserstoff bis zum Quecksilber (Ordnungszahl 80) und konnte bei vielen die Existenz zweier oder mehrerer Isotopen feststellen; bei anderen ergaben die Versuche den unzweifelhaften Beweis, daß wir es mit „Reinelementen“ zu tun haben (X, He, C, N, O, Fl, P, S, As). Neon, das erste der von Aston untersuchten Gase, vom Atomgewicht (oder wie man heute die Verhältniszahl, die in chemischen Verbindungen eine Rolle spielt, besser nennt: Verbindungsgewicht) 20,2, erwies sich als Mischelement aus zwei Isotopen vom Gewicht 20 und 22, die im Verhältnis 1:9 vorhanden sind. Chlor, das von allen Elementen des periodischen Systems die größte Abweichung von der Ganzzahligkeit aufweist (35.46), zeigt sich als Gemisch von zwei Isotopen 35 und 37, außerdem treten noch Linien, die auf $m = 38$ und 39 hinweisen, auf, aber keine Linie zeigt sich bei 35.46. Quecksilber besteht aus mehr als 4, Krypton aus 6 Komponenten, Bor, dem die Chemie das Atomgewicht 11,0 zuschrieb, erweist sich trotzdem als Gemisch von 10 und 11, Brom, vom Atomgewicht 79.92, zeigt sich überraschenderweise als zusammengesetzt aus zwei Bestandteilen, 79 und 81, aber eine Linie, die auf das zu erwartende Atomgewicht 80 hindeuten würde, ist nicht vorhanden.

Teile der Astonschen Resultate wurden bisher auf gänzlich verschiedenen Wegen bestätigt. Diffusionsversuche, bei denen ein Mischgas in Bestandteile von verschiedenem spezifischem Gewicht zerlegt werden muß, hatten bei Wasserstoff und Sauerstoff ein negatives Ergebnis, erweisen also diese beiden Stoffe als Reinelemente. Versuche mit Chlorwasserstoff, die in Amerika seit mehreren Jah-

ren durchgeführt werden, haben zum Nachweis von Chlorisotopen geführt, deren Atomgewichte mit den aus den Massenspektrogrammen berechneten übereinstimmen. Ein Verdampfungsverfahren stellte die Existenz von Isotopen bei Quecksilber fest.

Unterschiede in der Lage der Spektrallinien, die von Isotopen ausgesandt werden, müssen nach der Bohrschen Theorie im Prinzip vorhanden sein; bisher wurde nur hinsichtlich der radioaktiven und gewöhnlichen Isotopen von Blei bezw. Thallium behauptet, daß ihr Nachweis gelungen sei.

Die optischen Serienlinien werden ja nach Bohr als Folge von Elektronensprüngen im Atom angesehen — bei gleicher Kernladungszahl ist ein Unterschied in der Kernmasse von äußerst geringem Einfluß. Hingegen geben die Schwingungen, die in einem Molekül, das aus ungleichen Atomen aufgebaut ist, die Kernmassen gegeneinander ausführen, Veranlassung zur Aussendung eines Bandenspektrums, das im Ultrarot liegt — und in dem Abweichungen in der Kernmasse der einzelnen Moleküle sehr wohl eine meßbare Verschiebung der Linien bedingen können. Das ultrarote Spektrum des Chlorwasserstoffs ist experimentell sehr genau untersucht, und die Berechnung ergibt, auf Grundlage der Quantentheorie, unter Zugrundelegung des Gewichtes 35,46 für das Chloratom, die Lage der meisten gefundenen Linien in Übereinstimmung mit dem Experiment. Einige Linien jedoch blieben ungeklärt, und eine vollständige Deutung der gemessenen Baude in allen Einzelheiten gelang erst, als man die Berechnungen unter der Auffassung durchführte, daß das gefundene HCl-Spektrum durch Übereinanderlagerung der von HCl_{35} und HCl_{37} ausgesandten Banden entsteht. Obzwar die rechnerischen Grundlagen der Theorie der Bandenspektren heute noch umstritten sind, kann diese Übereinstimmung zugunsten der Isotopentheorie doch als sehr befriedigend bezeichnet werden.

Ein Punkt der Astonschen Resultate möchte auf den ersten Blick befremdend erscheinen. Während er bei allen Reinelementen und Bestandteilen von Mischelementen genau ganzzahlige Werte für die Atommassen fand, stellte er einwandfrei das Gewicht des Wasserstoffatoms aus seinen Messungen zu 1,008 fest, obzwar Wasserstoff ein Reinelement ist. Wie verträgt sich das mit der Proutschen Hypothese?

Im Sinne des aus der Relativitätstheorie entspringenden Satzes von der Trägheit der Energie muß jeder Energie Masse zugeschrieben werden

$$\text{Masse} = \frac{\text{Energie}}{\text{Quadrat der Lichtgeschwindigkeit}}.$$

Die ungeheuren Energiemengen, die frei werden, wenn mehrere Wasserstoffkerne und Elektronen sich zu einem Komplex, etwa einem Heliumatom, verbinden, können nun, wie die Berechnungen zeigen, für den beobachteten Massendefekt aufkommen. Aus den gleichen Berechnungen geht aber mit großer Wahrscheinlichkeit hervor, daß die doppelt ionisierten Heliumatome oder α-Teilchen Komplexe von großer Stabilität sind, die aus 4 Wasserstoffkernen und 2 Elektronen bestehen. So ist Prout mit seiner Anschauung, daß alle Atommassen im Wesentlichen aus Wasserstoffmassen bestehen, heute sehr zu Ehren gekommen.

Bemerkenswert bleibt aber doch, daß die Tatsache, von der Prout ausging, und die in erster Linie das Interesse aller an diesen Fragen Beteiligten erregte, nämlich die auffallende Ganzzahligkeit der Verbindungsgewichte, durch die Isotopenlehre keine Klärung findet. Wir wissen nicht, warum das eine Element ein Reinelement, das andere ein Mischelement ist, und warum die Isotopen in bestimmten, soweit sich aus den bekannten Verbindungsgewichten ersehen läßt, auf der ganzen Erde konstanten, Mischungsverhältnissen auftreten, noch weniger, warum die Mischungsverhältnisse so liegen, daß annähernd ganzzahlige Verbindungsgewichte entstehen.

Im Tätigkeitsbereich des praktischen Chemikers, in Industrie und Technik, dürften freilich fürs erste die Astonschen Ergebnisse nicht allzuviel Unruhe stiften. Es wäre nur zu empfehlen, sich statt der altgewohnten Bezeichnung „Atomgewicht" an das exaktere Wort „Verbindungsgewicht" zu gewöhnen. Nach wie vor werden von Zeit zu Zeit internationale Kommissionen Tabellen der neu ermittelten Verbindungsgewichte herausgeben müssen, an die die Praxis sich bei ihren chemischen Berechnungen im allgemeinen zu halten haben wird.

G. Laski. 100

Über die Prüfung für das höhere Schulamt an der Technischen Hochschule Dresden. Die Ausbildung von Studierenden, die sich dem Lehrerberuf widmen wollen, hat an der Technischen Hochschule Dresden eine lange Vorgeschichte. Bereits 1862 wurde dem damaligen Polytechnikum eine eigene Abteilung für künftige Lehrer der Mathematik, der Naturwissenschaften und der Technik angegliedert. Aus ihr entwickelte sich die spätere Allgemeine Abteilung, von der im laufenden Jahr wegen der Größe des Lehrkörpers eine Mathematisch-naturwissenschaftliche Abteilung abgetrennt werden mußte. Die Wissenschaftliche Prüfungskommission für Kandidaten des höheren Schulamtes der mathematisch-physikalischen und chemischen Richtung besteht an der Technischen Hochschule seit 1879, 1899 wurde für die Studierenden dieser Richtung die volle Freizügigkeit mit der Universität Leipzig und im Jahre 1912 das Recht der Promotion zum „Doktor der technischen Wissenschaften" (Dr. rer. techn.) unter Voraussetzung der bestandenen Prüfung für das höhere Schulamt gewährt.

Die Dresdner Prüfungsordnung ermöglicht die Erwerbung einer Lehrbefähigung erster oder zweiter Stufe in Reiner Mathematik, in Physik, in Chemie, in Mineralogie mit Geologie und in Erdkunde, sowie einer Lehr-

befähigung erster Stufe in Angewandter Mathematik. In ihren Anforderungen stimmt sie fast vollständig überein mit der Leipziger und hat wie diese große Ähnlichkeit mit der Prüfungsordnung, die in Preußen soeben durch eine neue ersetzt worden ist. Die Prüfung besteht in einer Lehrprobe, einer Allgemeinen Prüfung und einer Fachprüfung. Die Allgemeine Prüfung erstreckt sich auf Philosophie, Pädagogik und ein Wahlfach (entweder deutsche Literatur oder Kunstgeschichte oder Volkswirtschaftslehre); sie ist mündlich, doch muß aus einem der drei zu prüfenden Gebiete eine schriftliche Hausarbeit geliefert werden. Die Fachprüfung erstreckt sich für die mathematische Gruppe auf Reine Mathematik, Physik und ein Wahlfach (Angewandte Mathematik oder Chemie oder Mineralogie mit Geologie oder Erdkunde) und für die naturwissenschaftliche Gruppe auf Chemie, Mineralogie mit Geologie und ein Wahlfach (Physik oder Erdkunde). In mindestens zwei Fächern muß eine Lehrbefähigung erster Stufe erreicht werden; aus einem von diesen ist eine schriftliche Hausarbeit zu liefern, jedoch werden in dem Fall, daß die erste Stufe der Lehrbefähigung in Reiner Mathematik erstrebt wird, zwei Hausarbeiten gefordert, von denen eine der Mathematik angehören muß. Diesen Ansprüchen der Prüfungsordnung sind die Vorlesungen und sonstigen Unterrichtseinrichtungen der Hochschule angepaßt.

Die Zahl der Prüfungen ist im Laufe der Jahre, besonders seit der Gewährung des Promotionsrechtes, stetig gestiegen. Ihre große Mehrheit gehörte der mathematischen Gruppe an. In Reiner und Angewandter Mathematik insbesondere sind zwischen dem 1. April 1902 und dem 1. April 1921 die folgenden Prüfungen erfolgreich abgelegt worden:

a) Reine Mathematik 1. Stufe: 68,

b) Reine Mathematik 2. Stufe: 19,

c) Angewandte Mathematik: 71, wovon 59 in Verbindung mit a) und 12 in Verbindung mit b).

In der Reinen Mathematik dürfen die Kandidaten den Prüfer unter den drei Inhabern der Lehrstühle für Höhere Mathematik und Darstellende Geometrie wählen. Für die Angewandte Mathematik war es bisher wie in der früheren Preußischen Prüfungsordnung dem Kandidaten freigestellt, sich vorzugsweise in der Darstellenden Geometrie oder in der Technischen Mechanik oder in der Geodäsie prüfen zu lassen; soweit noch zu ermitteln ist, wählten nur 11 Prüflinge die Technische Mechanik und 1 Prüfling die Geodäsie. Da in dieser Weise die Vorteile, die an der Technischen Hochschule dem Studium der Angewandten Mathematik geboten werden, nicht zur Geltung kommen, hat im vergangenen Jahr die Bestimmung über die Angewandte Mathematik in der Dresdner Prüfungsordnung die folgende, der neuen Preußischen Prüfungsordnung nachgebildete Fassung erhalten:

Von den Kandidaten, die die Lehrbefähigung in der Angewandten Mathematik nachweisen wollen, sind außer einer Lehrbefähigung in der Reinen Mathematik zu fordern: Kenntnis der Darstellenden Geometrie (bis zur Lehre von der Zentralprojektion einschließlich und entsprechende Fertigkeit im Zeichnen) und der Methoden des graphischen und numerischen Rechnens — beides nachzuweisen durch Belege und Halbjahrszeugnisse — sowie Bekanntschaft ihrer Anwendungen in einem Gebiete, das der Kandidat unter den folgenden auswählen darf: 1. Technische Mechanik einschließlich der graphischen Statik, 2. Geodäsie (niedere und Elemente der höheren Geodäsie) nebst Ausgleichungsrechnung und den Grundlehren der Astronomie, 3. Mathematische Statistik und Versicherungswesen.

Diese Wahlfächer sollen durch geeignete technische Gebiete vermehrt werden.

Die Anstellung der Kandidaten des höheren Schulamtes erfolgt in Sachsen ganz unabhängig davon, ob sie die Prüfung in Leipzig oder in Dresden abgelegt haben. Da die Dresdner Kandidaten vorwiegend aus Dresden und Umgebung stammen, ist es natürlich, daß gerade an den Dresdner höheren Schulen eine größere Anzahl von ihnen als Lehrer tätig ist. Aber sie sind auch auswärts, unter anderem an der Chemnitzer Gewerbeakademie in mathematischen Lehrstellen zu finden.

Dresden, 12. Juni 1921.

W. Ludwig. 67.

NACHRICHTEN

Zur Versammlung der Mathematiker und Physiker in Jena. Auf der diesjährigen Tagung der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, der Deutschen physikalischen Gesellschaft und der Deutschen Gesellschaft für Technische Physik werden die Gebiete der angewandten Mathematik und Mechanik in höherem Ausmaß als bisher zur Geltung kommen. Wie aus dem diesem Heft vorangestellten Programm zu ersehen ist und teilweise schon früher mitgeteilt wurde, wird vor allem innerhalb der Mathematiker-Vereinigung eine besondere Sitzung (am Dienstag, den 20. September, vormittags 9 Uhr) der Mechanik gewidmet sein, in der sprechen werden:

v. Mises, Über die gegenwärtige Krise der Mechanik;

Jaffé, Bericht über unstetige und mehrdeutige Lösungen der hydrodynamischen Gleichungen;

v. Kármán, Über laminare und turbulente Flüssigkeitsreibung;

Hopf, Über Grundwasserströmung;

Reißner, Bemerkungen zum Propellerproblem;

L. Föppl, Neuere Fortschritte der technischen Elastizitätstheorie;

Hencky, Numerische Bearbeitung partieller Differentialgleichungen in der Technik;

Mehmke, Neue Gelenkmechanismin.

Außerdem wird in einer späteren Sitzung Herr Lichtenstein einen Bericht über die mathematischen Probleme in der Theorie der Figur der Himmelskörper erstatten und Herr Mack einen Vortrag zur Demonstration seines Perspektographen halten.

Eine weitere Reihe von Vorträgen, die in den Interessenbereich dieser Zeitschrift fallen, findet im Rahmen der Gesellschaft für Technische Physik statt. Hier sind insbesondere aus dem Gebiet der technischen Mechanik angemeldet:

Prandtl, Bemerkungen über die Entstehung der Turbulenz;

v. Kármán, Wärmeübergang an bewegte Flüssigkeiten und Gase;

Schiller, Experimentelle Feststellungen zum Turbulenzproblem;

Hopf, Messung der hydraulischen Rauhigkeit.

Die Tage und Stunden für diese Vorträge sind noch nicht festgesetzt.

Aus dieser Zusammenstellung geht ein erfreulicher Aufschwung des Interesses an den Problemen der Technischen Mechanik hervor. Es erscheint naheliegend, den Wunsch auszusprechen, daß für die Zukunft durch eine etwas einheitlichere Organisation jeder Zersplitterung vorgebeugt werde. Daher hat Professor Prandtl-Göttingen angeregt, die Jenaer Tagung auch dazu zu benutzen, um einen Zusammenschluß der an der Fortbildung der Technischen Mechanik Interessierten herbeizuführen. In welcher Form dies möglich und zweckmäßig sein wird, darüber wird in Jena noch zu beraten sein. An alle Fachkollegen ergeht hiermit die Einladung, sich recht zahlreich in Jena einzufinden und an der Beratung teilzunehmen. Das Nähere über Ort und Zeit der Besprechungen wird gelegentlich der oben genannten Vorträge mitgeteilt werden. 95

Mathematik und Physik an den preußischen Technischen Hochschulen. Der Minister für Wissenschaft, Kunst und Volksbildung hat mit Erlaß vom 30. Juni ds. Js. wichtige Verfügungen getroffen, die den Aufgabenkreis der Allgemeinen Abteilungen an den Technischen Hochschulen wesentlich erweitern. Erstens erhalten die genannten Abteilungen das Recht, den Grad eines Dipl.-Ing. für die Fachrichtung der „Technischen Physik“ zu verleihen. Zweitens werden die Hochschulen hinsichtlich der Ausbildung der Oberlehrer für Mathematik, Physik und Chemie an höheren Schulen den preußischen Universitäten gleichgestellt in dem Sinne, daß bei der Bewerbung um die Lehrbefähigung in diesen Gegenständen das ordnungsmäßige Studium an einer Technischen Hochschule voll angerechnet wird. Drittens bestimmt der Erlaß, daß die Allgemeinen Abteilungen das Recht erhalten, den Grad eines Doktor-Ingenieurs auf Grund von Arbeiten aus dem Gebiete der Wirtschaftswissenschaften oder der Mathematik oder der Naturwissenschaften zu verleihen an Bewerber, die vorher entweder die Diplomprüfung an einer Abteilung der Technischen Hochschule oder die Prüfung für das Lehramt an höheren Schulen bestanden haben.

Mathematisch-naturwissenschaftlicher Ferienkursus für Lehrer höherer Schulen. Bei der staatlichen Hauptstelle für den naturwissenschaftlichen Unterricht in Berlin wird in der Zeit vom 4. bis 15. Oktober ds. Js. ein mathematisch-naturwissenschaftlicher Ferienkurs für Lehrer höherer Schulen in vier Arbeitsgruppen abgehalten. Die Vorlesungen für alle vier Arbeitsgruppen gemeinsam betreffen den „Heutigen Stand der Farbenphotographie“ von Gehr. Prof. Dr. Miethe, „Wechselstromprobleme“ von Gehr. Prof. Dr. Orlich sowie „Geometrisches Zeichnen und darstellende Geometrie als Vorbereitung für das Studium“ von Gehr. Prof. Dr. Scheffers. In den Übungen werden, nach den Gruppen getrennt, geometrisches Zeichnen in Verbindung mit der darstellenden Geometrie, Vermessungskunde, chemische, elektrochemische und physikalische Schulversuche, sowie praktische Unterweisung in der Werkstatt vorgenommen. Ein ausführliches Programm mit allen erforderlichen Angaben ist von der genannten Hauptstelle Berlin Invalidenstr. 57/62 zu erhalten.

ZUSCHRIFT AN DEN HERAUSGEBER

Zur Oberlehrerausbildung. Zu dem Aufsatz des Herrn Bieberbach: „Zur Ausbildung der Oberlehrer an den Technischen Hochschulen, ein neuer Vorschlag“, möchte ich mich nur mit wenigen Worten äußern. Denn wenn auch inzwischen durch Erlaß des Ministeriums den Technischen Hochschulen grundsätzlich die Ausbildung der Oberlehrer in Mathematik, Physik und Chemie wünschenswert, einige sachlich unrichtige Voraussetzungen der Bieberbachschen Überlegung richtig zu stellen. Die Technischen Hochschulen sind in einer lebhaften Entwicklung begriffen. Auch was die theoretischen Grundlagen, also vor allem die Mathematik, angeht. Sah es noch vor wenigen Jahren

so aus, als sollten diese Grundlagen immer mehr zurückgedrängt werden, so bricht sich jetzt allenthalben die Erkenntnis Bahn, daß der dazu befähigte Ingenieur kaum genug Mathematik lernen kann. Allerdings nicht der Durchschnitt, dem man nicht mehr Mathematik aufzwingen soll, als er wirklich nötig hat. Natürlich muß diese Mathematik für den Ingenieur geeignet, also anwendbar sein; aber deshalb ist sie noch immer reine, nicht etwa angewandte Mathematik. Es sind heute hauptsächlich Analysis und Geometrie, für die der mathematisch interessierte Ingenieur eine so starke Aufnahmefähigkeit besitzt, daß sich sein Bedürfnis von dem des Mathematikers nicht mehr all zu sehr unterscheiden dürfte. Auch soll die ihm gebotene Mathematik durchaus streng sein, d. h. sie soll die Grundlagen, auf denen sie aufbaut, klar und deutlich nennen und dann wirklich mathematisch vorgehen. Es wird also schon der echte mathematische Geist walten. Intellektuelle Unsauberkeit ist auch dem Ingenieur verhaßt, ganz abgesehen davon, daß die Mathematik überall, alo auch an den Technischen Hochschulen ihren erzieherischen Wert bekunden sollte. Nur die letzte Arithmetisierung, welche die heutige Universitätsmathematik meist anstrebt, kann natürlich nicht das Interesse des Ingenieurs wecken und muß in kurzen Ergänzungen dem Mathematiker gelehrt werden, soweit sie heute als zu dessen Ausbildung unbedingt erforderlich zu gelten hat. In diese Ergänzungen soll also nicht alles das, was über die allgemeine, für alle Techniker obligate Vorlesung hinausgeht, hineingepackt werden, wie Herr Bieberbach mich wohl mißverstanden hat, sondern nur die Arithmetisierung der Grundlagen. Danach wird sich der Unterricht in reiner Mathematik an einer Technischen Hochschule etwa so gestalten: Differential- und Integralrechnung nebst Differentialgleichungen und wenigen Stücken anderer Gebiete in 3 Semestern mit **4 + 4 + 3 St. V. und 3 × 2 St. Üb.**, gemeinsam mit allen Ingenieuren. Dazu 3 × 2 St. V. Ergänzungen für Mathematiker, in denen diese lernen werden, wie die moderne Mathematik die Grundlagen vertieft hat. Wenn der junge Mathematiker diese Grundlagen erst anschaulich, dann vertieft kennen lernt, wird er vieles leichter verstehen, ja sich überhaupt erst klar darüber werden, ob er in dieser Vertiefung das Wesen der Sache zu erblicken vermag und also wirklich Mathematiker ist. Dazu kommen dann Kursvorlesungen für Mathematiker und mathematisch interessierte Ingenieure gemeinsam: Analytische Geometrie, Funktionentheorie, partielle Differentialgleichungen, spezielle Funktionen, unendliche Reihen und Produkte, Vektoranalysis, Integralgleichungen, Flächentheorie, projektive Geometrie u. a. m. Alle diese Vorlesungen müssen die Mathematiker an den Technischen Hochschulen hinfort doch halten, weil die Ingenieure es verlangen. Sie haben auch die Zeit dazu, denn sie sind, den Geometer eingerechnet, drei Ordinarien und die allgemein obligaten Vorlesungen, namentlich die über darstellende Geometrie, sind stark gekürzt worden. Also brauchen auch die Mathematiker an den Technischen Hochschulen nicht, wie Herr Bieberbach meint, noch nebenher die Ausbildung der Oberlehrer zu leisten. Für diese gesondert kommen an den Technischen Hochschulen nur noch ganz wenige Vorlesungen in Frage, solche nämlich über Algebra, Zahlentheorie, Mengenlehre, reelle Funktionen, Grundlagen der Mathematik u. ä. Diese Zusatzleistung aber werden die Technischen Hochschulen ganz gewiß gut aufbringen können, wenn ihnen noch ein Privatdozent mit Lehrauftrag zur Verfügung steht. Diesen zu wünschen aber haben wir Mathematiker im Interesse eines geeigneten Nachwuchses allen Anlaß. Für den Staat aber sind die Kosten nicht von Belang. Die erforderliche Seminartätigkeit werden die Ordinarien an den Technischen Hochschulen im Interesse der Sache gewiß gerne zu ihren sonstigen Verpflichtungen hinzunehmen.

Ich kann demnach die Befürchtungen des Herrn Bieberbach, an den Technischen Hochschulen möchte eine dilettantische Mathematik hochkommen, nicht teilen. Im Gegenteil, diese steht weit eher zu befürchten, wenn die Mathematik an den Technischen Hochschulen nicht um ihrer selbst willen gepflegt wird und der Ingenieur nicht genügend Gelegenheit hat, so viel Mathematik zu lernen, als er nötig hat. Dann schafft er sie sich selber. Will man möglichst große Sicherheit, daß die Technischen Hochschulen das ihnen anvertraute Gut der jungen künftigen Mathematiker nicht verderben, so schaffe man allenthalben gemischte Prüfungsausschüsse, die sich aus Professoren der Universität und der Technischen Hochschulen zusammensetzen, wie sie schon in Berlin und in Württemberg bestehen. Auch wird die freie Konkurrenz zwischen den beiden Hochschulen beide anspornen, das Beste zu leisten.

Hamel. 92

Mit den vorstehenden Äußerungen des Herrn Hamel zu den Vorschlägen von Herrn Bieberbach über die Frage der Oberlehrerausbildung an den Technischen Hochschulen kann die Erörterung dieses Gegenstandes um so eher für den Augenblick abschließen, als ja — wie an anderer Stelle dieses Heftes mitgeteilt — eine amtliche Regelung der Frage durch die zuständige Behörde inzwischen erfolgt ist. Der Herausgeber möchte als Ergebnis der verschiedenen Äußerungen (Hamel, Heft 1 S. 77; Bieberbach, Heft 3 S. 230; Ludwig, dieses Heft S. 341, Hamel im vorstehenden) folgendes zusammenfassen. Es scheint Übereinstimmung darin zu bestehen, daß den Technischen Hochschulen Preußens Anteil an der Oberlehrerausbildung auf dem Gebiete der reinen und angewandten Mathematik, ähnlich wie es in Bayern, Sachsen und Württemberg schon längst der Fall ist, gewährt werden soll. Auch darin dürften die verschiedenen Seiten übereinstimmen, daß der Ausbildungsgang an der Technischen Hochschule nicht eine bloße Nachahmung des-

jenigen an der Universität sein darf. Vielmehr müssen die tiefgreifenden Unterschiede, die das Wesen der beiden Arten von Hochschulen erkennen läßt, nutzbar gemacht werden für eine Differenzierung der Ausbildung. Es ist selbstverständlich, daß jeder Schulamtskandidat, der von der Technischen Hochschule kommt, eine andere Stellung zu den Anwendungen der Mathematik gewonnen haben wird als derjenige, der seine Studien an der Universität gemacht hat. Ganz abgesehen von Einzelheiten des Lehrplanes wirkt die ganze Umwelt der Hochschule auf den einzelnen Studierenden so mächtig ein, daß sie ihm sicher fürs Leben eine veränderte Auffassung und Einstellung geben muß. In der ausdrücklichen Hervorhebung, in der Betonung und Festlegung dieser Eigenart und in der Forderung nach ihrer geregelten Verwertung für die Ausbildung erblicke ich das wesentliche des Bieberbachschen Vorschlages, der vielleicht nur in dem Punkte etwas zu weit geht — oder wenigstens dem Mißverständnis ausgesetzt ist, zu weit gehen zu wollen —, daß er für den Ausbildungsgang an der Technischen Hochschule einen eigenen Namen, nämlich den des „Hauptfaches angewandte Mathematik" einführen will. Jetzt, nachdem die grundsätzliche Gleichstellung der Technischen Hochschule mit den Universitäten erfolgt ist, kommt es meines Erachtens nur darauf an, die Prüfungsordnung, die ohnehin schon aus mannigfachen Gründen, ganz besonders vom Standpunkt der angewandten Mathematik, einer Verbesserung bedarf, so abzuändern, daß der wesentlichen und wohl von allen Seiten anerkannten Konsequenz des Bieberbachschen Vorschlages Rechnung getragen wird, nämlich der: es müsse auch bei der Prüfung der Kandidaten des höheren Schulamtes die Möglichketi offen stehen, die besondere Richtung des Ausbildungsganges — Universität oder Technische Hochschule — zur Geltung zu bringen. Diese Frage der Neugestaltung der Prüfungsordnung wird noch Gegenstand sorgfältiger Überlegung in den nächsten Jahren sein müssen.

Mises. 92a

(Redaktionsschluß 26. August 1921.)

Berichtigung.

In dem Aufsatze E. Pohlhausen in Heft 1 muß Gleichung (14), S. 32, lauten:

$$L = \frac{1}{2} \sum_h \sum_k L_{hk} + \frac{1}{2g} \sum R_h (\dot{U}_h^2 + \dot{V}_h^2),$$

so daß sich an Stelle der Gleichungen (32), S. 34, ergibt:

$$\lambda^2 \left\{ u_h \left(\frac{1}{3} \sum_k F_{hk} l_{hk} + \frac{R_h}{\gamma} \right) + \frac{1}{6} \sum_k u_k \cdot F_{hk} \cdot l_{hk} \right\} = \sum_k \mathfrak{S}_{hk} \cos \alpha_{hk},$$

$$\lambda^2 \left\{ v_h \left(\frac{1}{3} \sum_k F_{hk} l_{hk} + \frac{R_h}{\gamma} \right) + \frac{1}{6} \sum_k v_k F_{hk} l_{hk} \right\} = \sum_k \mathfrak{S}_{hk} \sin \alpha_{hk}.$$

In dem durchgerechneten Beispiel sind alle R_h gleich Null, so daß obige Verbesserung, die ich Herrn Prof. Blumenthal verdanke, hierbei ohne Einfluß bleibt.

Pohlhausen.

Druck von A. W. Schade, Berlin N. 39.